

Chuyên đề Cấp số nhân: Công thức và Bài tập vận dụng

Cấp số nhân là một dạng dãy số đặc biệt và thường gặp trong chương trình Toán lớp 11 cũng như trong các bài toán thực tế. Chuyên đề này sẽ tổng hợp đầy đủ các kiến thức nền tảng nhất về cấp số nhân, giúp bạn nắm vững định nghĩa, công thức và cách giải các dạng bài tập liên quan.

1. Định nghĩa Cấp số nhân

a. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một hằng số q không đổi.

- Hằng số q được gọi là **công bội** của cấp số nhân.
- Dãy số (u_n) là cấp số nhân nếu: $u_{n+1} = u_n \cdot q$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Điều kiện: Số hạng đầu $u_1 \neq 0$ và công bội $q \neq 0$.

b. Ví dụ minh họa

1. **Ví dụ 1:** Dãy số 2, 6, 18, 54, 162, ... là một cấp số nhân.

- Số hạng đầu: $u_1 = 2$.
- Công bội: $q = 6 / 2 = 18 / 6 = 3$.

2. **Ví dụ 2:** Dãy số 100, -50, 25, -12.5, ... là một cấp số nhân.

- Số hạng đầu: $u_1 = 100$.
- Công bội: $q = -50 / 100 = -1/2$.

3. **Ví dụ 3:** Dãy số 5, 5, 5, 5, ... là một cấp số nhân với $u_1 = 5$ và công bội $q = 1$.

2. Công thức Số hạng tổng quát

a. Công thức

Nếu một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công bội là q , thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ (với } n \geq 1 \text{)}$$

b. Giải thích

Công thức này cho phép chúng ta tìm được giá trị của bất kỳ số hạng nào trong dãy chỉ cần biết số hạng đầu tiên và công bội, mà không cần phải liệt kê tất cả các số hạng trước đó.

- $u_2 = u_1 \cdot q^{2-1} = u_1 \cdot q$
- $u_3 = u_1 \cdot q^{3-1} = u_1 \cdot q^2$
- ...

c. Ví dụ minh họa

1. **Ví dụ 1:** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = 2$. Tìm số hạng thứ 8.

Lời giải:

Áp dụng công thức số hạng tổng quát, ta có:

$$u_8 = u_1 \cdot q^{8-1} = 3 \cdot 2^7 = 3 \cdot 128 = 384.$$

Vậy số hạng thứ 8 của cấp số nhân là 384.

2. **Ví dụ 2:** Một cấp số nhân có số hạng thứ 4 bằng 24 và số hạng thứ 6 bằng 96. Tìm số hạng đầu và công bội.

Lời giải:

Ta có hệ phương trình:

$$\circ u_4 = u_1 \cdot q^3 = 24 \quad (1)$$

$$\circ u_6 = u_1 \cdot q^5 = 96 \quad (2)$$

Lấy (2) chia cho (1) vế theo vế, ta được:

$$(u_1 \cdot q^5) / (u_1 \cdot q^3) = 96 / 24$$

$$q^2 = 4 \Rightarrow q = 2 \text{ hoặc } q = -2.$$

$$\text{- Nếu } q = 2, \text{ thay vào (1): } u_1 \cdot 2^3 = 24 \Rightarrow u_1 \cdot 8 = 24 \Rightarrow u_1 = 3.$$

$$\text{- Nếu } q = -2, \text{ thay vào (1): } u_1 \cdot (-2)^3 = 24 \Rightarrow u_1 \cdot (-8) = 24 \Rightarrow u_1 = -3.$$

Vậy có hai cặp (u_1, q) thỏa mãn là $(3, 2)$ và $(-3, -2)$.

3. Tính chất các số hạng của Cấp số nhân

a. Tính chất

Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối, nếu có) đều là tích của hai số hạng đứng liền kề với nó.

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \quad (\text{với } k \geq 2)$$

Từ đó suy ra $|u_k| = \sqrt{(u_{k-1} \cdot u_{k+1})}$, nghĩa là giá trị tuyệt đối của mỗi số hạng là trung bình nhân của hai số hạng kề nó.

b. Ví dụ minh họa

1. **Ví dụ 1:** Cho cấp số nhân 2, 6, 18, 54, ... Kiểm tra tính chất với số hạng $u_3 = 18$.

Lời giải:

Ta có $u_2 = 6$ và $u_4 = 54$.

Theo tính chất: $u_3^2 = u_2 \cdot u_4$

$$18^2 = 324$$

$$6 \cdot 54 = 324$$

Vậy $18^2 = 6 \cdot 54$. Tính chất được thỏa mãn.

2. **Ví dụ 2:** Tìm x để ba số 2, x, 18 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Lời giải:

Để ba số 2, x, 18 lập thành một cấp số nhân, thì chúng phải thỏa mãn tính chất của cấp số nhân:

$$x^2 = 2 \cdot 18$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6 \text{ hoặc } x = -6.$$

Vậy $x = 6$ hoặc $x = -6$.

4. Công thức tính tổng n số hạng đầu

a. Công thức

Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu u_1 và công bội q . Tổng của n số hạng đầu tiên, ký hiệu là S_n , được tính như sau:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

- Nếu $q = 1$, thì $S_n = n \cdot u_1$.
- Nếu $q \neq 1$, thì công thức tính tổng là: $S_n = u_1 \cdot (1 - q^n) / (1 - q)$

b. Ví dụ minh họa

1. **Ví dụ 1:** Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân có $u_1 = 1$ và $q = 2$.

Lời giải:

Áp dụng công thức tính tổng với $q = 2 \neq 1$:

$$S_{10} = u_1 \cdot (1 - q^{10}) / (1 - q) = 1 \cdot (1 - 2^{10}) / (1 - 2)$$

$$S_{10} = (1 - 1024) / (-1) = -1023 / -1 = 1023.$$

Vậy tổng 10 số hạng đầu là 1023.

2. **Ví dụ 2:** Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6%/năm, theo hình thức lãi kép. Hỏi sau 5 năm, người đó nhận được tổng cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

Lời giải:

Đây là một bài toán ứng dụng của cấp số nhân. Số tiền sau mỗi năm là một cấp số nhân với:

- Số hạng đầu u_1 (số tiền sau năm thứ 1) $= 100 \cdot (1 + 0.06) = 106$ triệu

đồng.

- Công bội $q = 1 + 0.06 = 1.06$.

Số tiền sau 5 năm chính là số hạng thứ 5 của cấp số nhân này (với số tiền ban đầu là $u_0 = 100$).

Hoặc ta có thể coi số tiền ban đầu là $u_1 = 100$. Khi đó số tiền sau 5 năm là u_6 .

Ta tính số hạng u_6 : $u_6 = u_1 \cdot q^{6-1} = 100 \cdot (1.06)^5 \approx 133.82$ triệu đồng.

Vậy sau 5 năm, người đó nhận được khoảng 133.82 triệu đồng.

5. Bảng tổng kết công thức

Dưới đây là bảng tóm tắt các công thức quan trọng cần nhớ về cấp số nhân:

Nội dung	Công thức	Điều kiện
Định nghĩa	$u_{n+1} = u_n \cdot q$	$n \in \mathbb{N}^*$
Số hạng tổng quát	$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$	$n \geq 1$
Tính chất	$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$	$k \geq 2$
Tổng n số hạng đầu	$S_n = u_1 \cdot (1 - q^n) / (1 - q)$	$q \neq 1$
Tổng n số hạng đầu (TH đặc biệt)	$S_n = n \cdot u_1$	$q = 1$

Hy vọng tài liệu này sẽ giúp các bạn học sinh nắm vững kiến thức và tự tin giải quyết các bài toán về cấp số nhân. Chúc các bạn học tốt!