

Tổng hợp kiến thức Giới hạn hàm số Lớp 11

Chuyên đề giới hạn hàm số là một trong những nội dung quan trọng nhất của chương trình Đại số và Giải tích lớp 11, là nền tảng cho phần Đạo hàm và các khái niệm sau này. Tài liệu này sẽ tổng hợp đầy đủ các kiến thức cần nhớ.

Phần I: Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

1. Định nghĩa giới hạn hữu hạn

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần đến x_0 nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $K \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1)$.

Khi x dần đến 2, giá trị của $3x - 1$ sẽ dần đến $3(2) - 1 = 5$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$.

- **Ví dụ 2:** Tính $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)/(x - 1)$.

Với $x \neq 1$, ta có $(x^2 - 1)/(x - 1) = (x - 1)(x + 1)/(x - 1) = x + 1$. Do đó, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)/(x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$.

2. Các quy tắc tính giới hạn hữu hạn

Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

- Quy tắc cộng/trừ: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$
- Quy tắc nhân: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
- Quy tắc chia: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) / g(x)] = L / M$ (với điều kiện $M \neq 0$)
- Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Ví dụ minh họa:

Cho $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -2$. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} [2f(x) - g(x)]$.

Áp dụng quy tắc, ta có: $\lim_{x \rightarrow 3} [2f(x) - g(x)] = 2 * \lim_{x \rightarrow 3} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2 * 5 - (-2) = 12$.

3. Giới hạn một phía

- **Giới hạn bên phải:** $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$. Nghĩa là x dần đến x_0 với $x > x_0$.
- **Giới hạn bên trái:** $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$. Nghĩa là x dần đến x_0 với $x < x_0$.

Điều kiện để tồn tại giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

Ví dụ minh họa:

Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 2x & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$. Tính giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow 1$.

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 1 + 1 = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2 * 1 = 2$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

Phần II: Giới hạn vô cực của hàm số

1. Giới hạn vô cực

Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với mọi dãy số $(x_n) \rightarrow x_0$, ta có $\lim f(x_n) = +\infty$.

Ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

2. Một số quy tắc về giới hạn vô cực

a. Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

b. Quy tắc tìm giới hạn của thương $f(x)/g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)]$
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 1)/(x - 2)$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 1) = 3(2) - 1 = 5 > 0$.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$ và $x - 2 > 0$ khi $x \rightarrow 2^+$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 1)/(x - 2) = +\infty$.

Phần III: Giới hạn của hàm số tại vô cực

1. Định nghĩa

Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

Ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

2. Một số giới hạn đặc biệt tại vô cực

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$ (c là hằng số)
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c/x^k = 0$ (với c là hằng số, k là số nguyên dương)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ (với k là số nguyên dương)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ (nếu k chẵn) và $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ (nếu k lẻ)

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2/x^3) = 0$.
- **Ví dụ 2:** $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 + 2x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3(4 + 2/x^2 - 1/x^3) = -\infty$.
(Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4 + 2/x^2 - 1/x^3) = 4 > 0$).

Phần IV: Các dạng vô định và phương pháp khử

Khi tính giới hạn trực tiếp dẫn đến các dạng như $0/0$, ∞/∞ , $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ta cần sử dụng các phương pháp biến đổi để khử dạng vô định.

1. Dạng vô định $0/0$

Phương pháp: Phân tích tử và mẫu thành nhân tử để rút gọn nhân tử chung, hoặc nhân với biểu thức liên hợp nếu có chứa căn thức.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1 (Phân tích nhân tử):** Tính $L = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)/(x - 2)$.
$$L = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)(x + 2)/(x - 2) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4.$$
- **Ví dụ 2 (Nhân liên hợp):** Tính $L = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1} - 1)/x$.
$$L = \lim_{x \rightarrow 0} [(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)] / [x(\sqrt{x+1} + 1)]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1 - 1) / [x(\sqrt{x+1} + 1)] = \lim_{x \rightarrow 0} x / [x(\sqrt{x+1} + 1)]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} 1 / (\sqrt{x+1} + 1) = 1 / (\sqrt{1} + 1) = 1/2.$$

2. Dạng vô định ∞/∞

Phương pháp: Chia cả tử và mẫu cho lũy thừa bậc cao nhất của x .

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 3x - 1)/(x^2 - 5x)$.

Chia cả tử và mẫu cho x^2 , ta được:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + 3/x - 1/x^2)/(1 - 5/x) = (2 + 0 - 0)/(1 - 0) = 2.$$

3. Dạng vô định $\infty - \infty$

Phương pháp: Nhân với biểu thức liên hợp hoặc quy đồng mẫu số để đưa về dạng ∞/∞ .

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)] / (\sqrt{x^2 + x} + x)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x - x^2) / (\sqrt{x^2(1 + 1/x)} + x)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x / (x\sqrt{1 + 1/x} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x / [x(\sqrt{1 + 1/x} + 1)]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 / (\sqrt{1 + 1/x} + 1) = 1 / (\sqrt{1 + 0} + 1) = 1/2.$$

4. Dạng vô định $0 \cdot \infty$

Phương pháp: Biến đổi biểu thức để đưa về dạng $0/0$ hoặc ∞/∞ . Thường là đưa một thừa số xuống mẫu.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x * (1/x - 1/x^2)$.

Ta không thể tính trực tiếp. Thay vào đó, ta biến đổi: $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 1/x) = -\infty$.

Phần V: Hàm số liên tục

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu:

Công thức: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Ví dụ minh họa:

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \{ (x^2 - 1)/(x - 1) \text{ nếu } x \neq 1; 2 \text{ nếu } x = 1 \}$ tại $x_0 = 1$.

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- $f(1) = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)/(x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$ nên hàm số liên tục tại $x = 1$.

2. Các định lý cơ bản

- Các hàm số đa thức, hàm số phân thức hữu tỉ, hàm số lượng giác liên tục trên tập xác định của chúng.
- **Định lý giá trị trung gian:** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$. Định lý này dùng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình.