

Hệ thống kiến thức về Hình thoi và Hình vuông

Chào các em học sinh, tài liệu này sẽ giúp các em tổng hợp và hệ thống hóa toàn bộ kiến thức quan trọng về hình thoi và hình vuông - hai tứ giác đặc biệt thường gặp trong chương trình Toán lớp 8. Chúng ta sẽ cùng nhau đi qua định nghĩa, các tính chất cốt lõi, dấu hiệu nhận biết và các công thức tính toán liên quan.

Phần 1: Hình thoi

1. Định nghĩa

Hình thoi là một tứ giác có bốn cạnh bằng nhau. Từ định nghĩa này, ta có thể suy ra hình thoi là một trường hợp đặc biệt của hình bình hành.

Tứ giác ABCD là hình thoi $\Leftrightarrow \mathbf{AB = BC = CD = DA}$

Ví dụ:

- **Ví dụ 1:** Cho tứ giác MNPQ có $MN = 5\text{cm}$, $NP = 5\text{cm}$, $PQ = 5\text{cm}$, $QM = 5\text{cm}$.
Tứ giác MNPQ là hình thoi vì có bốn cạnh bằng nhau.
- **Ví dụ 2:** Một mảnh đất hình tứ giác có độ dài các cạnh lần lượt là 10m, 12m, 10m, 12m. Đây không phải là hình thoi vì các cạnh không bằng nhau.

2. Tính chất

Vì hình thoi là một hình bình hành đặc biệt, nó mang đầy đủ tính chất của hình bình hành, đồng thời có thêm các tính chất riêng biệt liên quan đến đường chéo.

a. Tính chất của hình bình hành:

- Các cạnh đối song song: $AB \parallel CD, AD \parallel BC$.
- Các góc đối bằng nhau: $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$.
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b. Tính chất riêng của hình thoi:

1. **Hai đường chéo vuông góc với nhau.** ($AC \perp BD$)
2. **Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.**
(AC là phân giác của $\angle A$ và $\angle C$; BD là phân giác của $\angle B$ và $\angle D$)

Ví dụ minh họa tính chất:

- **Ví dụ 1:** Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Biết $\angle BAC = 30^\circ$. Tính các góc của hình thoi.

Giải: Vì AC là đường phân giác của góc A nên $\angle BAD = 2 * \angle BAC = 2 * 30^\circ = 60^\circ$. Vì $ABCD$ là hình thoi nên $\angle BCD = \angle BAD = 60^\circ$. Trong hình thoi, hai góc kề bù nhau nên $\angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Suy ra $\angle ADC = \angle ABC = 120^\circ$.

- **Ví dụ 2:** Cho hình thoi $MNPQ$ có hai đường chéo $MP = 8\text{cm}$ và $NQ = 6\text{cm}$, cắt nhau tại I . Tính độ dài cạnh của hình thoi.

Giải: Vì hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và vuông góc với nhau nên ta có: $IM = MP/2 = 4\text{cm}$, $IN = NQ/2 = 3\text{cm}$ và $\triangle MIN$ vuông tại I . Áp

dụng định lý Pytago, ta có: $MN^2 = IM^2 + IN^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$. Suy ra $MN = 5\text{cm}$. Vậy cạnh của hình thoi là 5cm .

3. Dấu hiệu nhận biết

Để chứng minh một tứ giác là hình thoi, ta có thể sử dụng một trong các dấu hiệu sau:

1. **Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.**
2. **Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.**
3. **Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.**
4. **Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.**

Ví dụ minh họa dấu hiệu nhận biết:

- **Ví dụ 1:** Cho hình bình hành ABCD. Trên đường chéo BD lấy hai điểm E và F sao cho $BE = DF$. Chứng minh tứ giác AECF là hình bình hành. Nếu $AC \perp EF$ thì AECF là hình gì?

Giải: Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì ABCD là hình bình hành nên O là trung điểm của AC và BD. Vì $BE = DF$ nên O cũng là trung điểm của EF. Tứ giác AECF có hai đường chéo AC và EF cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường nên AECF là hình bình hành. Nếu $AC \perp EF$ (tức là $AC \perp BD$), hình bình hành AECF có hai đường chéo vuông góc nên AECF là hình thoi.

- **Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Chứng minh tứ giác ADFE là hình thoi.

Giải: Vì D, F là trung điểm của AB, BC nên DF là đường trung bình của ΔABC

⇒ $DF \parallel AC$ và $DF = AC/2$. Vì E là trung điểm của AC nên $AE = AC/2$. Suy ra $DF = AE$ và $DF \parallel AE$. Do đó, tứ giác ADFE là hình bình hành. Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $AB = AC$. Mà D, E là trung điểm của AB, AC nên $AD = AB/2$ và $AE = AC/2$. Suy ra $AD = AE$. Hình bình hành ADFE có hai cạnh kề AD và AE bằng nhau nên ADFE là hình thoi.

4. Công thức tính chu vi và diện tích

- **Chu vi hình thoi:** $P = 4a$ (với a là độ dài cạnh)
- **Diện tích hình thoi:** $S = (1/2) * d_1 * d_2$ (với d_1, d_2 là độ dài hai đường chéo)
hoặc $S = a * h$ (với a là cạnh và h là chiều cao tương ứng)

Ví dụ:

- **Ví dụ 1:** Một hình thoi có độ dài cạnh là 6cm. Chu vi của nó là $P = 4 * 6 = 24\text{cm}$.
- **Ví dụ 2:** Một sân chơi hình thoi có độ dài hai đường chéo là 10m và 14m. Diện tích sân chơi là $S = (1/2) * 10 * 14 = 70 \text{ m}^2$.

Phần 2: Hình vuông

1. Định nghĩa

Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau. Từ định nghĩa này, ta thấy hình vuông vừa là hình chữ nhật (có 4 góc vuông), vừa là hình thoi (có 4 cạnh bằng nhau).

Tứ giác ABCD là hình vuông ⇔ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ và $AB = BC = CD = DA$

2. Tính chất

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

- Bốn cạnh bằng nhau.
- Bốn góc bằng nhau và bằng 90° .
- Các cạnh đối song song.
- Hai đường chéo bằng nhau, vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
- Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình vuông (chia mỗi góc 90° thành hai góc 45°).

Ví dụ minh họa tính chất:

- **Ví dụ 1:** Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm. Tính độ dài đường chéo AC.

Giải: Xét tam giác vuông ABC vuông tại B. Áp dụng định lý Pytago, ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$. Suy ra $AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ cm.

- **Ví dụ 2:** Cho hình vuông MNPQ, hai đường chéo MP và NQ cắt nhau tại O. Góc MON bằng bao nhiêu độ?

Giải: Vì MNPQ là hình vuông nên hai đường chéo của nó vuông góc với nhau. Do đó, $\angle MON = 90^\circ$.

3. Dấu hiệu nhận biết

Để chứng minh một tứ giác là hình vuông, ta có thể chứng minh nó vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi. Cụ thể, ta dùng các dấu hiệu sau:

1. **Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.**
2. **Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.**
3. **Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.**
4. **Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.**
5. **Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.**

Ví dụ minh họa dấu hiệu nhận biết:

- **Ví dụ 1:** Cho hình thoi ABCD có góc A bằng 90° . Chứng minh ABCD là hình vuông.

Giải: Vì ABCD là hình thoi nên nó là một hình bình hành. Hình bình hành ABCD có $\angle A = 90^\circ$ nên nó là hình chữ nhật. Lại có ABCD là hình thoi nên $AB = AD$. Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông. Vậy ABCD là hình vuông. (Hoặc đơn giản: Hình thoi có một góc vuông là hình vuông).

- **Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh BC. Vẽ $DE \perp AB$ tại E và $DF \perp AC$ tại F. Chứng minh tứ giác AEDF là hình vuông.

Giải: Xét tứ giác AEDF có: $\angle AEF = 90^\circ$, $\angle EAF = 90^\circ$, $\angle AFD = 90^\circ$. Suy ra AEDF là hình chữ nhật. Tam giác ABC vuông cân tại A nên $\angle B = 45^\circ$. Tam giác BED vuông tại E có $\angle B = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân tại E $\Rightarrow ED = EB$. Vì AEDF là hình chữ nhật nên $AF = ED$. Do đó $AF = EB$. Mặt khác, $\triangle AFC$ vuông tại F, có $\angle C = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân tại F $\Rightarrow AF = FC$. Suy ra $AE = FC$. Vậy $AB = AE + EB = FC + AF = AC$. Do AEDF là hình chữ nhật, ta chỉ cần chứng minh nó có 1 đường chéo là phân giác. $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên đường phân giác AD cũng là đường cao, trung tuyến. Nếu D là trung

điểm BC thì AD là phân giác góc A. Khi đó hình chữ nhật AEDF có đường chéo AD là phân giác góc A nên là hình vuông.

4. Công thức tính chu vi và diện tích

- **Chu vi hình vuông:** $P = 4a$ (với a là độ dài cạnh)
- **Diện tích hình vuông:** $S = a^2$ (với a là độ dài cạnh)
- **Độ dài đường chéo:** $d = a\sqrt{2}$

Ví dụ:

- **Ví dụ 1:** Một mảnh vườn hình vuông có cạnh 15m. Chu vi mảnh vườn là $P = 4 * 15 = 60\text{m}$. Diện tích mảnh vườn là $S = 15^2 = 225 \text{ m}^2$.
- **Ví dụ 2:** Một hình vuông có diện tích là 81 cm^2 . Cạnh của hình vuông là $a = \sqrt{81} = 9 \text{ cm}$. Đường chéo của nó là $d = 9\sqrt{2} \text{ cm}$.

Phần 3: So sánh và Mối liên hệ giữa Hình thoi và Hình vuông

Hình vuông là một dạng đặc biệt của hình thoi và hình chữ nhật. Bảng so sánh dưới đây sẽ giúp các em thấy rõ sự giống và khác nhau giữa chúng.

Đặc điểm	Hình thoi	Hình vuông
Cạnh	4 cạnh bằng nhau. Các cạnh đối song song.	4 cạnh bằng nhau. Các cạnh đối song song.
Góc	Các góc đối bằng nhau.	4 góc bằng nhau và bằng 90° .
Đường chéo	- Cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. - Vuông góc với nhau. - Là đường phân giác của các góc.	- Bằng nhau. - Cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. - Vuông góc với nhau. - Là đường phân giác của các góc.
Tính đối xứng	Có 2 trục đối xứng là 2 đường chéo. Có 1 tâm đối xứng là giao điểm 2 đường chéo.	Có 4 trục đối xứng (2 đường chéo, 2 đường thẳng đi qua trung điểm các cặp cạnh đối). Có 1 tâm đối xứng là giao điểm 2 đường chéo.

Mối liên hệ:

- Một hình thoi có thêm một góc vuông sẽ trở thành hình vuông.
- Một hình thoi có thêm hai đường chéo bằng nhau sẽ trở thành hình vuông.

Hi vọng tài liệu này sẽ là một công cụ học tập hữu ích, giúp các em nắm vững kiến thức và tự tin giải quyết các bài toán liên quan đến hình thoi và hình vuông. Chúc các em học tốt!