

Tổng hợp kiến thức: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng và thể tích vật thể tròn xoay

Tích phân không chỉ là một công cụ tính toán trừu tượng mà còn có nhiều ứng dụng thực tế quan trọng trong hình học. Chương này tập trung vào hai ứng dụng chính: tính diện tích của các hình phẳng phức tạp và tính thể tích của các vật thể được tạo ra bằng cách quay một hình phẳng quanh một trục.

I. Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

Nguyên tắc cơ bản là chia hình phẳng thành vô số các hình chữ nhật nhỏ có diện tích $f(x)dx$ rồi tính tổng các diện tích đó thông qua phép toán tích phân.

1. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành ($y=0$) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Công thức tổng quát:

Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Giải thích:

- Dấu giá trị tuyệt đối $|f(x)|$ đảm bảo diện tích luôn là một giá trị không âm.

- Nếu $f(x) \geq 0$ trên đoạn $[a, b]$, công thức trở thành: $S = \int_a^b f(x) dx$.
- Nếu $f(x) \leq 0$ trên đoạn $[a, b]$, công thức trở thành: $S = \int_a^b -f(x) dx$.
- Nếu hàm số $f(x)$ đổi dấu tại điểm c thuộc (a, b) , ta cần chia tích phân: $S = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx$.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành, và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

Giải:

Trên đoạn $[1, 2]$, hàm số $y = x^2 \geq 0$. Do đó:

$$S = \int_1^2 x^2 dx = [x^3/3]_1^2 = (2^3/3) - (1^3/3) = 8/3 - 1/3 = 7/3 \text{ (đvdt)}.$$

2. **Ví dụ 2:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và trục hoành.

Giải:

Đầu tiên, ta tìm giao điểm của đồ thị với trục hoành bằng cách giải phương trình $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = -1$.

Ta cần tính diện tích trên hai khoảng $[-1, 0]$ và $[0, 1]$.

Trên $[-1, 0]$, $x^3 - x \geq 0$. Trên $[0, 1]$, $x^3 - x \leq 0$.

$$S = \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 -(x^3 - x) dx$$

$$S = [x^4/4 - x^2/2]_{-1}^0 + [-x^4/4 + x^2/2]_0^1$$

$$S = (0 - (1/4 - 1/2)) + ((-1/4 + 1/2) - 0) = 1/4 + 1/4 = 1/2 \text{ (đvdt)}.$$

2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Công thức tổng quát:

Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Giải thích:

- Công thức này là diện tích của "miền" nằm giữa hai đường cong.
- Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối, ta xét dấu của hiệu $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a, b]$.
- Nếu các đường thẳng $x = a$, $x = b$ không được cho trước, chúng thường là hoành độ giao điểm của hai đồ thị. Ta phải giải phương trình $f(x) = g(x)$ để tìm cận tích phân.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2$ và $y = x + 2$.

Giải:

Tìm hoành độ giao điểm: $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 2$.

Vậy cận tích phân là $a = -1$, $b = 2$.

Trên đoạn $[-1, 2]$, ta có $x + 2 \geq x^2$ (có thể thử với $x=0$: $2 > 0$). Do đó, $|x^2 - (x+2)| = x + 2 - x^2$.

$$S = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = [x^2/2 + 2x - x^3/3] \Big|_{-1}^2$$

$$S = ((2^2/2 + 2 \cdot 2 - 2^3/3) - ((-1)^2/2 + 2 \cdot (-1) - (-1)^3/3))$$

$$S = (2 + 4 - 8/3) - (1/2 - 2 + 1/3) = (10/3) - (-7/6) = 20/6 + 7/6 = 27/6 = 9/2 \text{ (đvdt)}.$$

2. **Ví dụ 2:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục hoành.

Giải:

Đây là trường hợp phức tạp hơn. Ta cần vẽ đồ thị để hình dung.

Giao điểm của $y = \sqrt{x}$ và $y = x - 2$: $\sqrt{x} = x - 2$ (với $x \geq 2$) $\Leftrightarrow x = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại), $x = 4$ (nhận).

Giao điểm là $(4, 2)$.

Giao điểm với trục hoành: $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Hình phẳng bị chia thành hai phần bởi đường thẳng $x = 2$.

Phần 1 (từ $x = 0$ đến $x = 2$): giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$ và trục hoành. $S_1 = \int_0^2 \sqrt{x} dx = [2/3 * x^{3/2}] \Big|_0^2 = 4\sqrt{2}/3$.

Phần 2 (từ $x = 2$ đến $x = 4$): giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$ và $y = x - 2$. $S_2 = \int_2^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx = [2/3 * x^{3/2} - x^2/2 + 2x] \Big|_2^4 = (16/3 - 8 + 8) - (4\sqrt{2}/3 - 2 + 4) = 16/3 - 4\sqrt{2}/3 - 2 = 10/3 - 4\sqrt{2}/3$.

Tổng diện tích $S = S_1 + S_2 = 4\sqrt{2}/3 + 10/3 - 4\sqrt{2}/3 = 10/3$ (đvdt).

II. Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể tròn xoay

Khi một hình phẳng quay quanh một trục (thường là Ox hoặc Oy), nó sẽ tạo ra một vật thể tròn xoay. Tích phân giúp chúng ta tính thể tích của vật thể này bằng cách cộng thể tích của vô số các "lát cắt" hình đĩa hoặc hình vành khăn.

1. Vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng (giới hạn bởi $y = f(x)$, trục Ox, $x = a$, $x = b$) quanh trục Ox

Công thức (Phương pháp đĩa - Disk Method):

Thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục Ox, $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Giải thích:

- Mỗi lát cắt vuông góc với trục Ox tại điểm x là một hình đĩa có bán kính $R = |f(x)|$.
- Diện tích mặt đĩa là $\pi R^2 = \pi [f(x)]^2$.
- Thể tích của lát cắt mỏng là $dV = \pi [f(x)]^2 dx$. Tích phân từ a đến b sẽ cho ta tổng thể tích.

Ví dụ minh họa:

- Ví dụ 1:** Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2$, trục Ox, $x = 0$ và $x = 1$ quanh trục Ox.

Giải:

Áp dụng công thức:

$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi [x^5/5] \Big|_0^1 = \pi(1/5 - 0) = \pi/5 \text{ (đvtt)}.$$

2. **Ví dụ 2:** Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình elip $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ quanh trục Ox.

Giải:

Từ phương trình elip, ta có $y^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$. Hình elip cắt trục Ox tại $x = -a$ và $x = a$.

$$V = \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \pi \int_{-a}^a b^2(1 - x^2/a^2) dx$$

$$V = \pi b^2 [x - x^3/3a^2] \Big|_{-a}^a = \pi b^2 [(a - a^3/3a^2) - (-a - (-a)^3/3a^2)]$$

$$V = \pi b^2 [(a - a/3) - (-a + a/3)] = \pi b^2 [2a/3 - (-2a/3)] = 4/3 \pi ab^2 \text{ (đvtt)}.$$

2. **Vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng (giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$) quanh trục Ox**

Giả sử trên $[a, b]$, hai hàm số đều không âm và $f(x) \geq g(x)$.

Công thức (Phương pháp vành khăn - Washer Method):

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

Giải thích:

- Khi quay, mỗi lát cắt sẽ là một hình vành khăn.
- Thể tích của vật thể được tính bằng cách lấy thể tích của vật thể tạo bởi đường cong ngoài $y = f(x)$ trừ đi thể tích của vật thể tạo bởi đường cong

trong $y = g(x)$.

- Lưu ý quan trọng: $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 \neq [f(x) - g(x)]^2$.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = x$ quanh trục Ox.

Giải:

Giao điểm: $x^2 = x \Leftrightarrow x = 0, x = 1$. Trên $[0, 1]$, ta có $x \geq x^2$.

Áp dụng công thức với $f(x) = x$ và $g(x) = x^2$:

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - (x^2)^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx$$

$$V = \pi [x^3/3 - x^5/5] \Big|_0^1 = \pi (1/3 - 1/5) = 2\pi/15 \text{ (đvtt)}.$$

3. **Vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng (giới hạn bởi $x = g(y)$, trục Oy, $y = c$, $y = d$) quanh trục Oy**

Công thức:

Tương tự như trường hợp quay quanh trục Ox, nhưng ta sẽ tích phân theo biến y.

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

Giải thích:

- Ta xem x là hàm của y: $x = g(y)$.
- Các lát cắt bây giờ vuông góc với trục Oy. Bán kính của mỗi đĩa là $R = |g(y)|$.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2$ (nhánh $x \geq 0$), trục Oy và đường thẳng $y = 2$ quanh trục Oy.

Giải:

Từ $y = x^2$, ta suy ra $x = \sqrt{y}$ (vì $x \geq 0$). Vậy $g(y) = \sqrt{y}$.

Cận tích phân theo y là từ $c = 0$ đến $d = 2$.

$$V = \pi \int_0^2 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^2 y dy$$

$$V = \pi [y^2/2]_0^2 = \pi (2^2/2 - 0) = 2\pi \text{ (đvtt)}.$$

III. Bảng tóm tắt công thức

Ứng dụng	Hình phẳng giới hạn bởi	Công thức
Tính diện tích	$y = f(x), y = 0, x = a, x = b$	$S = \int_a^b f(x) dx$
	$y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$	$S = \int_a^b f(x) - g(x) dx$
Tính thể tích	Quay quanh Ox: $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$	$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
	Quay quanh Ox: $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$	$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$
	Quay quanh Oy: $x = g(y), x = 0, y = c, y = d$	$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$

IV. Các bước giải bài toán ứng dụng tích phân

1. **Bước 1: Xác định hình phẳng (H).** Vẽ phác thảo đồ thị để xác định hình phẳng cần tính diện tích hoặc quay để tính thể tích. Điều này giúp xác định đường nào nằm trên, đường nào nằm dưới.
2. **Bước 2: Xác định cận tích phân.** Tìm hoành độ (hoặc tung độ) giao điểm của các đường cong bằng cách giải phương trình tương ứng. Đây chính là các cận a , b (hoặc c , d).
3. **Bước 3: Lựa chọn công thức phù hợp.** Dựa vào yêu cầu bài toán (tính diện tích hay thể tích, quay quanh trục nào) để chọn công thức đúng.
4. **Bước 4: Thiết lập và tính tích phân.** Thay các hàm số và cận vào công thức. Khử dấu giá trị tuyệt đối (đối với diện tích) và thực hiện phép tính tích phân để ra kết quả cuối cùng.