

I. Kiến thức nền tảng cần nhớ

Trước khi đi vào các dạng toán cụ thể, chúng ta cần ôn lại một số kiến thức cơ bản về cực trị của hàm số.

1. Định nghĩa điểm cực trị

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại một khoảng $(x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \setminus \{x_0\}$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .
- Nếu tồn tại một khoảng $(x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \setminus \{x_0\}$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**.

2. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Định lý 1: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 .

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số.

Lưu ý: Điểm cực trị là điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định, và đạo hàm phải đổi dấu khi đi qua điểm đó.

II. Các dạng toán và phương pháp giải

Bài toán cực trị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối thường được chia thành các dạng cơ bản sau:

Dạng 1: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$

a. Phương pháp khảo sát trực tiếp

Ta có thể phá dấu giá trị tuyệt đối:

$$\begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$$

Từ đó, ta tính đạo hàm y' và lập bảng biến thiên để tìm các điểm cực trị. Tuy nhiên, phương pháp này thường phức tạp và dài dòng.

b. Phương pháp sử dụng đồ thị (Phương pháp suy đồ thị)

Đây là phương pháp trực quan và hiệu quả nhất.

- Bước 1:** Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$.
- Bước 2:** Suy ra đồ thị (C') của hàm số $y = |f(x)|$ bằng cách:
 - Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành Ox (phần có $f(x) \geq 0$).
 - Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành Ox qua trục Ox.
- Bước 3:** Đếm số điểm "nhon" và các điểm cực trị cũ (đã nằm trên Ox) trên đồ thị (C'). Đó chính là số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$.

c. Công thức tính nhanh

Công thức: Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng của số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm đơn (hoặc nghiệm bội lẻ) của phương trình $f(x) = 0$.

Số CĐCT của $y=|f(x)| = (\text{Số CĐCT của } f(x)) + (\text{Số nghiệm của } f(x)=0)$

Ví dụ 1: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |x^3 - 3x + 1|$.

Giải:

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Bước 1: Tìm số điểm cực trị của $f(x)$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

$f'(x)$ đổi dấu khi đi qua 2 điểm này, vậy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Bước 2: Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$. Ta có $f(1) = -1$, $f(-1) = 3$. Vì $f(1) \cdot f(-1) < 0$ nên phương trình có nghiệm trong khoảng $(-1, 1)$. Bằng cách bấm máy tính hoặc khảo sát, ta thấy phương trình này có 3 nghiệm phân biệt.

Bước 3: Áp dụng công thức.

Số điểm cực trị của $y = |x^3 - 3x + 1| = (\text{Số điểm cực trị của } f(x)) + (\text{Số nghiệm của } f(x) = 0) = 2 + 3 = 5$.

Vậy hàm số có 5 điểm cực trị.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x)|$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Giải:

Dựa vào bảng biến thiên:

- Hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị (tại $x = -1$ và $x = 1$).
- Để tìm số nghiệm của $f(x) = 0$, ta kẻ đường thẳng $y = 0$ cắt đồ thị $f(x)$. Dựa vào các giá trị cực trị và giới hạn, ta thấy đường $y = 0$ sẽ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt (một nghiệm -1, một nghiệm giữa -1 và 1, một nghiệm > 1).

Áp dụng công thức, số điểm cực trị của $g(x) = |f(x)|$ là: $2 + 3 = 5$.

Dạng 2: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$

Hàm số $y = f(|x|)$ là một hàm số chẵn, do đó đồ thị của nó đối xứng qua trục tung Oy.

a. Phương pháp sử dụng đồ thị

- Bước 1:** Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$.
- Bước 2:** Suy ra đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ bằng cách:
 - Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục tung Oy (ứng với $x \geq 0$).

- Bỏ đi phần đồ thị (C) nằm bên trái trục tung Oy (ứng với $x < 0$).
- Lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ lại ở bên phải qua trục tung Oy.

3. **Bước 3:** Đếm số điểm cực trị trên đồ thị (C') vừa thu được.

b. Công thức tính nhanh

Công thức: Gọi m là số điểm cực trị có hoành độ dương ($x > 0$) của hàm số $y = f(x)$. Khi đó, số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là **$2m + 1$** .

Giải thích: Mỗi điểm cực trị có hoành độ dương của $f(x)$ sẽ tạo ra hai điểm cực trị đối xứng qua Oy cho hàm $f(|x|)$. Ngoài ra, điểm $x = 0$ (giao điểm với trục Oy) cũng trở thành một điểm cực trị (cực tiểu nếu $f'(0+) > 0$ và cực đại nếu $f'(0+) < 0$) của hàm $f(|x|)$.

Ví dụ 3: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$.

Giải:

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Bước 1: Tìm các điểm cực trị của $f(x)$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bước 2: Xác định số điểm cực trị có hoành độ dương.

Trong hai điểm cực trị $x = 0$ và $x = 2$, có một điểm cực trị có hoành độ dương là $x = 2$. Vậy $m = 1$.

Bước 3: Áp dụng công thức.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|) = |x|^3 - 3(|x|)^2 + 2$ là: $2m + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x - 1)^2(x + 2)^3$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

Giải:

Bước 1: Tìm các điểm cực trị của $f(x)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = -2.$$

Ta xét sự đổi dấu của $f'(x)$ qua các nghiệm:

- Tại $x = 1$, $(x-1)^2$ là nghiệm bội chẵn nên $f'(x)$ không đổi dấu. Do đó $x = 1$ không phải là điểm cực trị.
- Tại $x = 0$, x là nghiệm đơn nên $f'(x)$ đổi dấu. $x = 0$ là điểm cực trị.
- Tại $x = -2$, $(x+2)^3$ là nghiệm bội lẻ nên $f'(x)$ đổi dấu. $x = -2$ là điểm cực trị.

Vậy $f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x = 0$ và $x = -2$.

Bước 2: Xác định số điểm cực trị có hoành độ dương.

Trong các điểm cực trị tìm được, không có điểm nào có hoành độ dương. Vậy $m = 0$.

Bước 3: Áp dụng công thức.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là: $2m + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$.

Dạng 3: Các dạng toán kết hợp và bài toán chứa tham số

Các bài toán này thường kết hợp hai dạng trên hoặc yêu cầu biện luận số điểm cực trị theo tham số m .

Ví dụ 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ có 5 điểm cực trị.

Giải:

Số điểm cực trị của $y = |f(x)|$ bằng (số điểm cực trị của $f(x)$) + (số nghiệm của $f(x) = 0$).

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Hàm số $f(x)$ luôn có 2 điểm cực trị với mọi m .

Để hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị, ta cần:

$$5 = (\text{Số ĐCĐ của } f(x)) + (\text{Số nghiệm của } f(x)=0)$$

$$5 = 2 + (\text{Số nghiệm của } f(x)=0)$$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = x^3 - 3x + m = 0$ phải có 3 nghiệm phân biệt.

Điều này tương đương với phương trình $x^3 - 3x = -m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm $g(x) = x^3 - 3x$. Ta có $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Giá trị cực đại: $g(-1) = 2$.

Giá trị cực tiểu: $g(1) = -2$.

Để đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị $g(x)$ tại 3 điểm phân biệt thì giá trị của $-m$ phải nằm giữa giá trị cực đại và cực tiểu.

Tức là: $g(1) - m < g(-1) \Leftrightarrow -2 - m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Vậy với $-2 < m < 2$ thì hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Dạng 4: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$

Ta có thể thực hiện tuần tự:

1. Tìm số điểm cực trị của hàm $g(x) = f(|x|)$.
2. Từ đó, tìm số điểm cực trị của hàm $y = |g(x)| = |f(|x|)|$.

Ví dụ 6: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = ||x|^3 - 3|x||$.

Giải:

Đặt $h(x) = x^3 - 3x$. Ta cần tìm số cực trị của $y = |h(|x|)|$.

Bước 1: Tìm cực trị của $g(x) = h(|x|) = |x|^3 - 3|x|$.

Hàm $h(x) = x^3 - 3x$ có $h'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Hàm $h(x)$ có 1 điểm cực trị dương là $x = 1$. Vậy $m = 1$.

Số điểm cực trị của $g(x) = h(|x|)$ là $2m + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Ba điểm cực trị này là $x = -1, x = 0, x = 1$.

Bước 2: Tìm cực trị của $y = |g(x)| = |h(|x|)|$.

Số cực trị của $y = |g(x)|$ bằng (số cực trị của $g(x)$) + (số nghiệm của $g(x)=0$).

- Số cực trị của $g(x)$ là 3.

- Số nghiệm của $g(x) = 0 \Leftrightarrow |x|^3 - 3|x| = 0 \Leftrightarrow |x|(|x|^2 - 3) = 0$.
- Ta có $|x| = 0$ (nghiệm $x=0$) hoặc $|x| = \sqrt{3}$ (nghiệm $x = \pm\sqrt{3}$).
- Phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Tuy nhiên, một trong các điểm cực trị của $g(x)$ là $x = 0$, cũng là một nghiệm của $g(x) = 0$. Do đó, điểm này không tạo thêm điểm cực trị mới cho hàm giá trị tuyệt đối.

Cụ thể hơn, tại $x=0$, $g(0)=0$. $g(x)$ có một điểm cực đại tại $x=0$. Khi lấy trị tuyệt đối, điểm này vẫn là điểm cực đại.

Các nghiệm khác $g(x) = 0$ là $x = \pm\sqrt{3}$. Tại hai điểm này, đồ thị $g(x)$ cắt trục Ox , khi lấy trị tuyệt đối sẽ tạo ra 2 điểm cực tiểu (điểm nhọn).

Vậy số điểm cực trị của $y = |g(x)|$ là: 3 (cực trị cũ) + 2 (cực trị mới từ nghiệm khác 0) = 5.

III. Bảng tổng kết phương pháp tính nhanh

Dạng hàm số	Công thức tính nhanh số điểm cực trị	Ghi chú
$y = f(x) $	$a + b$	a là số điểm cực trị của hàm số $f(x)$. b là số nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) của phương trình $f(x) = 0$.
$y = f(x)$	$2m + 1$	m là số điểm cực trị có hoành độ dương của hàm số $f(x)$.