

Chuyên đề Cấp số cộng: Công thức và Bài tập

Cấp số cộng là một dạng dãy số đặc biệt và thường gặp trong chương trình Toán học THPT. Tài liệu này sẽ tổng hợp đầy đủ kiến thức về định nghĩa, công thức số hạng tổng quát và công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng.

1. Định nghĩa Cấp số cộng

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d .

Số d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

Nếu (u_n) là một cấp số cộng với công sai d , ta có công thức truy hồi:

$$u_n = u_{n-1} + d \text{ với mọi } n \geq 2.$$

- Nếu $d > 0$, cấp số cộng là một dãy số tăng.
- Nếu $d < 0$, cấp số cộng là một dãy số giảm.
- Nếu $d = 0$, cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng bằng nhau).

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Dãy số 2, 5, 8, 11, 14,... là một cấp số cộng.

- Số hạng đầu: $u_1 = 2$
- Công sai: $d = 5 - 2 = 3$.
- Vì $d = 3 > 0$ nên đây là một dãy số tăng.

2. **Ví dụ 2:** Dãy số 10, 6, 2, -2, -6,... là một cấp số cộng.

- Số hạng đầu: $u_1 = 10$
- Công sai: $d = 6 - 10 = -4$.
- Vì $d = -4 < 0$ nên đây là một dãy số giảm.

3. **Ví dụ 3:** Dãy số 1, 3, 6, 10, 15,... không phải là cấp số cộng.

- Ta có: $3 - 1 = 2$, nhưng $6 - 3 = 3$. Vì hiệu giữa các số hạng liên tiếp không phải là một hằng số nên đây không phải cấp số cộng.

2. Công thức Số hạng tổng quát (u_n)

Công thức số hạng tổng quát cho phép chúng ta tìm một số hạng bất kỳ trong cấp số cộng mà không cần liệt kê tất cả các số hạng trước đó. Công thức này được suy ra từ định nghĩa:

- $u_2 = u_1 + d$
- $u_3 = u_2 + d = (u_1 + d) + d = u_1 + 2d$
- $u_4 = u_3 + d = (u_1 + 2d) + d = u_1 + 3d$
- ...

Từ đó, ta có công thức tổng quát:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

Trong đó:

- u_n là số hạng thứ n .
- u_1 là số hạng đầu tiên.
- n là vị trí của số hạng.
- d là công sai.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Cho một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công sai $d = 3$. Tìm số hạng thứ 10.

Giải:

Áp dụng công thức số hạng tổng quát, ta có:

$$u_{10} = u_1 + (10 - 1)d = 5 + 9 * 3 = 5 + 27 = 32.$$

Vậy, số hạng thứ 10 của cấp số cộng là 32.

2. **Ví dụ 2:** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = 10$ và $u_7 = 19$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d .

Giải:

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_4 = u_1 + 3d = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_7 = u_1 + 6d = 19 \end{cases}$$

Lấy phương trình thứ hai trừ đi phương trình thứ nhất, ta được: $(u_1 + 6d) - (u_1 + 3d) = 19 - 10 \Rightarrow 3d = 9 \Rightarrow d = 3$.

Thay $d = 3$ vào phương trình đầu tiên: $u_1 + 3 \cdot 3 = 10 \Rightarrow u_1 + 9 = 10 \Rightarrow u_1 = 1$.

Vậy, số hạng đầu là 1 và công sai là 3.

3. Tính chất các số hạng của Cấp số cộng

Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối, nếu có) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó.

$u_k = (u_{k-1} + u_{k+1}) / 2$ với mọi $k \geq 2$.

Tính chất này rất hữu ích để kiểm tra xem ba số có lập thành một cấp số cộng hay không, hoặc để tìm một số hạng khi biết hai số hạng kề nó.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ: Tìm x để ba số 2, x , 8 lập thành một cấp số cộng.

Giải:

Để ba số 2, x , 8 lập thành một cấp số cộng, thì x phải là trung bình cộng của 2 và 8.

$$x = (2 + 8) / 2 = 10 / 2 = 5.$$

Vậy $x = 5$. Dãy số tương ứng là 2, 5, 8 với công sai $d = 3$.

4. Công thức tính tổng n số hạng đầu tiên (S_n)

Để tính tổng của n số hạng đầu tiên trong một cấp số cộng, ta sử dụng một trong hai công thức sau:

Công thức 1: Khi biết số hạng đầu (u_1) và số hạng cuối (u_n)

$$S_n = n * (u_1 + u_n) / 2$$

Công thức này có thể hiểu là tổng bằng "số lượng số hạng" nhân với "trung bình cộng của số đầu và số cuối".

Công thức 2: Khi biết số hạng đầu (u_1) và công sai (d)

Thay $u_n = u_1 + (n-1)d$ vào công thức 1, ta được:

$$S_n = n * [u_1 + u_1 + (n - 1)d] / 2 = n * [2u_1 + (n - 1)d] / 2$$

Công thức này rất tiện lợi khi ta không biết số hạng cuối u_n .

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng có $u_1 = 2$ và công sai $d = 4$.

Giải:

Áp dụng công thức 2, ta có:

$$S_{20} = 20 * [2*2 + (20 - 1)*4] / 2 = 10 * [4 + 19*4] = 10 * [4 + 76] = 10 * 80 = 800.$$

Vậy, tổng 20 số hạng đầu tiên là 800.

2. **Ví dụ 2:** Tính tổng các số tự nhiên lẻ từ 1 đến 99.

Giải:

Dãy số 1, 3, 5, ..., 99 là một cấp số cộng với:

- Số hạng đầu: $u_1 = 1$
- Công sai: $d = 2$
- Số hạng cuối: $u_n = 99$

Trước hết, ta cần tìm số lượng số hạng (n) trong dãy này. Áp dụng công thức số hạng tổng quát:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \Rightarrow 99 = 1 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow 98 = (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n - 1 = 49 \Rightarrow n = 50.$$

Vậy có 50 số hạng. Bây giờ, áp dụng công thức 1 để tính tổng:

$$S_{50} = 50 \cdot (1 + 99) / 2 = 50 \cdot 100 / 2 = 2500.$$

Vậy, tổng các số tự nhiên lẻ từ 1 đến 99 là 2500.

5. Bảng tóm tắt công thức

Nội dung	Công thức
Công thức truy hồi	$u_n = u_{n-1} + d$
Số hạng tổng quát	$u_n = u_1 + (n - 1)d$
Tính chất các số hạng	$u_k = (u_{k-1} + u_{k+1}) / 2$
Tổng n số hạng đầu	$S_n = n * (u_1 + u_n) / 2 = n * [2u_1 + (n - 1)d] / 2$