

Tổng quan về bài toán tối ưu hóa và vai trò của đạo hàm

Các bài toán tối ưu hóa là những bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất (maximum) hoặc nhỏ nhất (minimum) của một đại lượng nào đó, trong những điều kiện ràng buộc cho trước. Các đại lượng này có thể là diện tích, thể tích, chi phí, lợi nhuận, khoảng cách, thời gian,... Đạo hàm chính là công cụ toán học mạnh mẽ giúp chúng ta xác định được các điểm cực trị (cực đại, cực tiểu) của một hàm số, từ đó tìm ra lời giải cho bài toán tối ưu hóa.

Phương pháp chung giải bài toán tối ưu hóa

Để giải một bài toán thực tế về tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN), chúng ta thường tiến hành theo các bước sau:

1. Bước 1: Phân tích bài toán và đặt ẩn.

Đọc kỹ đề bài để xác định đại lượng cần tối ưu hóa (ví dụ: diện tích, thể tích, chi phí...). Chọn một đại lượng phù hợp làm biến số (thường ký hiệu là x) và biểu diễn các đại lượng khác theo biến số đó.

2. Bước 2: Thiết lập hàm số.

Biểu diễn đại lượng cần tối ưu hóa thành một hàm số theo biến số đã chọn ở Bước 1. Ký hiệu hàm số là $f(x)$.

3. Bước 3: Tìm miền xác định (điều kiện) của biến số.

Dựa vào các điều kiện và ràng buộc của bài toán thực tế, xác định tập giá trị mà biến x có thể nhận. Thông thường, đây sẽ là một đoạn $[a; b]$, một khoảng

(a; b) hoặc một nửa khoảng.

4. **Bước 4: Tìm GTLN, GTNN của hàm số.**

Sử dụng các công cụ của đạo hàm để tìm GTLN hoặc GTNN của hàm số $f(x)$ trên miền xác định đã tìm ở Bước 3.

- Tính đạo hàm $f'(x)$.
- Tìm các điểm tới hạn bằng cách giải phương trình $f'(x) = 0$ hoặc tìm các điểm mà tại đó $f'(x)$ không xác định.
- Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên miền xác định.
- Dựa vào bảng biến thiên để kết luận về GTLN, GTNN của hàm số. Nếu hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$, ta có thể tính giá trị của hàm số tại hai đầu mút a, b và tại các điểm tới hạn thuộc (a, b) rồi so sánh.

5. **Bước 5: Kết luận.**

Từ kết quả toán học vừa tìm được, trả lời câu hỏi của bài toán ban đầu. Lưu ý nêu rõ giá trị lớn nhất/nhỏ nhất là bao nhiêu và đạt được khi nào (giá trị của biến x tương ứng).

Các dạng bài toán tối ưu hóa thường gặp

1. Bài toán về Hình học

Đây là dạng toán yêu cầu tìm kích thước của một hình (hình chữ nhật, hình hộp, hình trụ...) sao cho diện tích, chu vi, hoặc thể tích của nó là lớn nhất hoặc nhỏ nhất, với một số điều kiện ràng buộc cho trước.

Ví dụ 1: Tối đa hóa diện tích

Một người nông dân có 100 mét hàng rào và muốn rào một mảnh đất hình chữ nhật dọc theo một bờ sông thẳng (không cần rào bờ sông). Hỏi kích thước của mảnh đất là bao nhiêu để diện tích được rào là lớn nhất?

Lời giải:

- **Bước 1-2:** Gọi chiều rộng của mảnh đất là x (m) và chiều dài là y (m). Chiều dài song song với bờ sông. Diện tích cần tối ưu là $S = x * y$. Theo đề bài, chu vi hàng rào là $2x + y = 100$. Từ đó suy ra $y = 100 - 2x$. Thay vào công thức diện tích, ta có hàm số: **$S(x) = x * (100 - 2x) = 100x - 2x^2$** .
- **Bước 3:** Vì x, y là kích thước hình học nên $x > 0$ và $y > 0$. Từ $y = 100 - 2x > 0$, ta có $x < 50$. Vậy miền xác định của x là $(0; 50)$.
- **Bước 4:** Khảo sát hàm số $S(x)$ trên $(0; 50)$.

Tính đạo hàm: **$S'(x) = 100 - 4x$** .

Giải $S'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 25$ (thỏa mãn điều kiện).

Lập bảng biến thiên:

x	0		25		50
S'(x)		+	0	-	
S(x)		↗	S(25)=1250	↘	

Dựa vào bảng biến thiên, $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 25$.

- **Bước 5:** Khi $x = 25$ m, thì $y = 100 - 2 \cdot 25 = 50$ m. Vậy để diện tích lớn nhất là 1250 m^2 , mảnh đất cần có kích thước là $25\text{m} \times 50\text{m}$.

Ví dụ 2: Tối đa hóa thể tích

Từ một tấm tôn hình vuông cạnh 24 cm, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau rồi gập tấm tôn lại để được một chiếc hộp không nắp. Hỏi cạnh của các hình vuông bị cắt phải bằng bao nhiêu để thể tích của hộp là lớn nhất?

Lời giải:

- **Bước 1-2:** Gọi cạnh của hình vuông bị cắt là x (cm). Sau khi cắt và gập, hộp sẽ có:

- Chiều dài đáy: $24 - 2x$
- Chiều rộng đáy: $24 - 2x$
- Chiều cao: x

Thể tích của hộp là $V = (24 - 2x)(24 - 2x)x = x(24 - 2x)^2$. Vậy hàm số cần tối ưu là **$V(x) = x(24 - 2x)^2$** .

- **Bước 3:** Điều kiện để tạo thành hộp là $x > 0$ và $24 - 2x > 0$, suy ra $0 < x < 12$.
- **Bước 4:** Khảo sát hàm số $V(x)$ trên $(0; 12)$.

$$V(x) = x(576 - 96x + 4x^2) = 4x^3 - 96x^2 + 576x.$$

$$\text{Tính đạo hàm: } \mathbf{V'(x) = 12x^2 - 192x + 576}.$$

$$\text{Giải } V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - 16x + 48) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 12) = 0.$$

Ta có $x = 4$ (nhận) hoặc $x = 12$ (loại vì nằm ngoài khoảng).

Lập bảng biến thiên trên $(0; 12)$, ta thấy $V(x)$ đạt cực đại tại $x = 4$.

- **Bước 5:** Vậy để thể tích hộp lớn nhất, cạnh của hình vuông bị cắt phải bằng 4 cm. Khi đó, thể tích lớn nhất là $V(4) = 4 * (24 - 2*4)^2 = 4 * 16^2 = 1024 \text{ cm}^3$.

2. Bài toán về Vật lý

Dạng toán này thường liên quan đến chuyển động, trong đó hàm số biểu thị quãng đường, vận tốc hoặc gia tốc theo thời gian. Yêu cầu có thể là tìm thời điểm vật đạt độ cao lớn nhất, vận tốc nhỏ nhất,...

Ví dụ 3: Tối đa hóa độ cao

Một vật được ném lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 19,6 m/s. Phương trình chuyển động của vật là $s(t) = 19,6t - 4,9t^2$, trong đó t là thời gian (giây) và s là độ cao (mét). Hỏi sau bao lâu vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao đó bằng bao nhiêu?

Lời giải:

- **Bước 1-3:** Hàm số cần tối ưu là hàm độ cao $s(t) = 19,6t - 4,9t^2$. Vật chuyển động từ $t = 0$ cho đến khi chạm đất trở lại ($s(t) = 0$).

$19,6t - 4,9t^2 = 0 \Leftrightarrow 4,9t(4 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 4$. Vậy miền xác định của t là $[0; 4]$.

- **Bước 4:** Khảo sát hàm $s(t)$ trên $[0; 4]$.

Tính đạo hàm: $s'(t) = 19,6 - 9,8t$.

Giải $s'(t) = 0 \Leftrightarrow 19,6 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (thuộc $[0; 4]$).

Tính các giá trị: $s(0) = 0$, $s(4) = 0$, $s(2) = 19,6*2 - 4,9*2^2 = 39,2 - 19,6 = 19,6$.

- **Bước 5:** So sánh các giá trị, ta thấy độ cao lớn nhất là 19,6 mét, đạt được tại thời điểm $t = 2$ giây.

3. Bài toán về Kinh tế

Dạng toán này thường liên quan đến việc tối đa hóa lợi nhuận hoặc tối thiểu hóa chi phí sản xuất.

- **Hàm chi phí $C(x)$:** Tổng chi phí để sản xuất x sản phẩm.
- **Hàm doanh thu $R(x)$:** Tổng doanh thu khi bán x sản phẩm. Thường $R(x) = (\text{giá bán 1 sản phẩm}) * x$.
- **Hàm lợi nhuận $P(x)$:** $P(x) = R(x) - C(x)$.

Ví dụ 4: Tối thiểu hóa chi phí trung bình

Một công ty sản xuất một loại sản phẩm với hàm tổng chi phí là $C(x) = 2x^2 + 20x + 1800$ (đơn vị: nghìn đồng), với x là số lượng sản phẩm. Chi phí sản xuất trung bình cho một sản phẩm được tính bằng hàm $A(x) = C(x)/x$. Hỏi cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để chi phí trung bình là thấp nhất?

Lời giải:

- **Bước 1-3:** Hàm chi phí trung bình là $A(x) = (2x^2 + 20x + 1800)/x = 2x + 20 + 1800/x$. Điều kiện là số sản phẩm $x > 0$, x nguyên dương. Ta xét hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$.
- **Bước 4:** Khảo sát hàm $A(x)$.

Tính đạo hàm: $A'(x) = 2 - 1800/x^2$.

Giải $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 1800/x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1800 \Leftrightarrow x^2 = 900 \Leftrightarrow x = 30$ (vì $x > 0$).

Lập bảng biến thiên trên $(0; +\infty)$, ta thấy $A(x)$ đạt cực tiểu (cũng là giá trị nhỏ nhất) tại $x = 30$.

- **Bước 5:** Vậy công ty cần sản xuất 30 sản phẩm để chi phí trung bình là thấp nhất. Chi phí trung bình lúc này là $A(30) = 2 \cdot 30 + 20 + 1800/30 = 60 + 20 + 60 = 140$ (nghìn đồng/sản phẩm).

Kết luận và lưu ý

Việc ứng dụng đạo hàm để giải các bài toán tối ưu hóa trong thực tế là một kỹ năng quan trọng, giúp chuyển hóa các vấn đề từ thực tiễn sang mô hình toán học và giải quyết chúng một cách hiệu quả. Khi giải bài toán, học sinh cần lưu ý:

- Đọc kỹ đề và xác định đúng đại lượng cần tối ưu và biến số.
- Luôn tìm điều kiện (miền xác định) của biến số dựa trên ngữ cảnh thực tế.
- Kiểm tra lại kết quả để đảm bảo nó hợp lý trong bối cảnh của bài toán.
- Vẽ hình minh họa (đối với bài toán hình học) sẽ giúp việc thiết lập hàm số trở nên dễ dàng hơn.