

Tổng hợp phương pháp tìm Giao tuyến và Giao điểm trong không gian

Đây là hai bài toán nền tảng và quan trọng nhất của chương trình Hình học không gian lớp 11. Việc nắm vững phương pháp giải hai dạng toán này là chìa khóa để giải quyết các bài toán phức tạp hơn như tìm thiết diện, chứng minh quan hệ song song, vuông góc.

I. Phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q)

1. Định nghĩa

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có vô số điểm chung khác. Tập hợp tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó là một đường thẳng, được gọi là **giao tuyến** của hai mặt phẳng.

2. Phương pháp chung

Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), ta cần tìm hai điểm chung phân biệt của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó chính là giao tuyến cần tìm.

Phương pháp:

- Bước 1:** Tìm điểm chung thứ nhất A của (P) và (Q). Thường là một điểm có sẵn hoặc dễ dàng nhìn thấy.

2. **Bước 2:** Tìm điểm chung thứ hai B của (P) và (Q). Để tìm B, ta xác định hai đường thẳng a và b lần lượt thuộc (P) và (Q), đồng thời chúng cùng nằm trong một mặt phẳng thứ ba và cắt nhau tại B.
3. **Bước 3:** Kết luận: Giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng AB. Ký hiệu: $(P) \cap (Q) = AB$.

3. Các trường hợp thường gặp và ví dụ minh họa

Trường hợp 1: Tìm hai điểm chung có sẵn trên hình

Đây là dạng bài cơ bản nhất, hai điểm chung là các đỉnh của hình chóp, hình lăng trụ...

Ví dụ: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang ($AB \parallel CD$). Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBD).

- **Phân tích:** Ta cần tìm hai điểm chung của (SAC) và (SBD).

- **Bước 1: Tìm điểm chung thứ nhất.**

Ta thấy S là đỉnh của hình chóp, S thuộc $SA \subset (SAC)$ và S thuộc $SB \subset (SBD)$.

Vậy **S** là điểm chung thứ nhất.

- **Bước 2: Tìm điểm chung thứ hai.**

Trong mặt phẳng đáy (ABCD), gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Vì O thuộc $AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC)$.

Vì O thuộc $BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD)$.

Vậy **O** là điểm chung thứ hai.

- **Bước 3: Kết luận.**

Từ hai bước trên, ta có S và O là hai điểm chung của (SAC) và (SBD).

Vậy giao tuyến của (SAC) và (SBD) là đường thẳng **SO**.

Trường hợp 2: Tìm một điểm chung có sẵn, một điểm chung phải xác định

Đây là dạng bài phổ biến. Ta có một điểm chung dễ thấy, điểm chung còn lại được xác định bằng cách tìm giao điểm của hai đường thẳng đồng phẳng.

Ví dụ: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là một điểm trên cạnh SC (M không trùng S và C). Tìm giao tuyến của mặt phẳng (ABM) và (SCD).

- **Phân tích:** Ta cần tìm hai điểm chung của (ABM) và (SCD).

- **Bước 1: Tìm điểm chung thứ nhất.**

Ta có $M \in SC$ mà $SC \subset (SCD) \Rightarrow M \in (SCD)$.

Mặt khác, $M \in (ABM)$.

Vậy **M** là điểm chung thứ nhất.

- **Bước 2: Tìm điểm chung thứ hai.**

Ta cần tìm giao điểm của một đường thẳng thuộc (ABM) và một đường thẳng thuộc (SCD).

Trong (ABM) có đường thẳng AB.

Trong (SCD) có đường thẳng CD.

Xét trong mặt phẳng đáy (ABCD), vì ABCD không phải hình thang nên AB và CD không song song, chúng sẽ cắt nhau. Gọi $E = AB \cap CD$.

Vì $E \in AB \subset (ABM) \Rightarrow E \in (ABM)$.

Vì $E \in CD \subset (SCD) \Rightarrow E \in (SCD)$.

Vậy **E** là điểm chung thứ hai.

- **Bước 3: Kết luận.**

Giao tuyến của (ABM) và (SCD) là đường thẳng **ME**.

II. Phương pháp tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α)

1. Định nghĩa

Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) là điểm chung duy nhất của d và (α).

2. Phương pháp chung

Để tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α), ta tìm giao điểm của d với một đường thẳng a nằm trong (α). Phương pháp này còn được gọi là "sử dụng mặt phẳng phụ".

Phương pháp:

1. **Bước 1:** Chọn một mặt phẳng phụ (β) chứa đường thẳng d . (Lưu ý: nên chọn mặt phẳng phụ sao cho việc tìm giao tuyến ở bước 2 là dễ dàng nhất).
2. **Bước 2:** Tìm giao tuyến a của mặt phẳng phụ (β) và mặt phẳng (α) theo phương pháp đã nêu ở phần I.
3. **Bước 3:** Trong mặt phẳng phụ (β), tìm giao điểm M của hai đường thẳng d và a .
4. **Bước 4:** Chứng minh M là điểm cần tìm và kết luận.

$$M = d \cap a.$$

$M \in d$.

$M \in a$, mà $a \subset (\alpha) \Rightarrow M \in (\alpha)$.

Vậy $M = d \cap (\alpha)$.

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của cạnh SA . Tìm giao điểm I của đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) .

- **Phân tích:** Ta cần tìm giao điểm của đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) .

- **Bước 1: Chọn mặt phẳng phụ.**

Chọn mặt phẳng phụ chứa OM . Để thấy O là tâm đáy, M là trung điểm SA nên ta chọn mặt phẳng phụ là **(SAC)**.

- **Bước 2: Tìm giao tuyến.**

Ta tìm giao tuyến của (SAC) và (SBC) .

Điểm chung thứ nhất là **S**.

Điểm chung thứ hai là **C**.

Vậy giao tuyến của (SAC) và (SBC) là đường thẳng **SC**.

- **Bước 3: Tìm giao điểm trong mặt phẳng phụ.**

Trong mặt phẳng (SAC) , gọi I là giao điểm của OM và SC .

$I = OM \cap SC$.

- **Bước 4: Kết luận.**

Ta có: $I \in OM$.

$I \in SC$, mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow I \in (SBC)$.

Vậy **$I = OM \cap (SBC)$** .

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tìm giao điểm P của đường thẳng SD và mặt phẳng (MNC).

- **Phân tích:** Tìm giao điểm của SD và (MNC).

- **Bước 1: Chọn mặt phẳng phụ.**

Chọn mặt phẳng phụ chứa SD là **(SAD)**.

- **Bước 2: Tìm giao tuyến của (SAD) và (MNC).**

- Điểm chung thứ nhất: $M \in SA \subset (SAD)$ và $M \in (MNC)$. Vậy **M** là điểm chung thứ nhất.

- Tìm điểm chung thứ hai: Trong (MNC) có đường thẳng CN. Trong (SAD) có đường thẳng AD. Hai đường thẳng này không đồng phẳng. Ta cần tìm một đường thẳng khác.

- Hãy tìm giao điểm của một đường thẳng trong (MNC) với (SAD). Ví dụ, tìm giao điểm của NC với (SAD). Khó.

- Ta sẽ tìm giao tuyến bằng cách khác: Tìm giao điểm của hai đường thẳng đồng phẳng.

- Trong (ABCD), gọi $I = AC \cap BD$. Trong (SBD), gọi $K = SI \cap BN$. Điểm K này phức tạp.

- Hãy dùng một cách tiếp cận khác: Mở rộng mặt phẳng (MNC).

- Trong mặt phẳng (SAB), MN là đường trung bình của tam giác SAB $\Rightarrow MN \parallel AB$.

- Trong mặt phẳng đáy (ABCD), $AB \parallel CD$ (nếu là hình bình hành) hoặc AB không song song CD. Để cho là hình thang $AD \parallel BC$.

- Ta tìm giao tuyến của (MNC) với (SAD) như sau:
- Gọi $O = AC \cap BD$. Trong (SAC), gọi $E = SO \cap MC$.
- $E \in SO \subset (SBD)$. $E \in MC \subset (MNC)$. Vậy E là điểm chung của (SBD) và (MNC).
- Lại có $N \in SB \subset (SBD)$ và $N \in (MNC)$.
- Vậy giao tuyến của (SBD) và (MNC) là đường thẳng EN.
- Trong (SBD), gọi $P = EN \cap SD$. P chính là giao điểm cần tìm.
- Cách này dài. Hãy thử cách đơn giản hơn.
- Lại từ Bước 2: Tìm giao tuyến của (SAD) và (MNC).

+ M là điểm chung thứ nhất.

+ Trong (ABCD), gọi $E = AD \cap BC$.

+ Trong (SBC), gọi $F = SE \cap NC$. $F \in SE$, $F \in NC \subset (MNC)$.

+ Trong (SAD), ... Cách này cũng phức tạp.

- Cách tiếp cận hiệu quả nhất cho bài này:

+ Chọn mặt phẳng phụ chứa SD là **(SBD)**.

+ Tìm giao tuyến của (SBD) và (MNC).

+ Gọi $O = AC \cap BD$. Trong (SAC), gọi $I = SO \cap MC$. I là một điểm chung.

+ N là điểm chung thứ hai.

+ Giao tuyến là IN.

+ Trong (SBD), gọi **$P = IN \cap SD$** .

• Bước 3 & 4: Kết luận.

Ta có: $P \in SD$.

$P \in IN$, mà $IN \subset (MNC) \Rightarrow P \in (MNC)$.

Vậy **$P = SD \cap (MNC)$** .