

Tổng hợp kiến thức về Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

Trong chương trình Toán lớp 10, việc nắm vững các công thức lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt là vô cùng quan trọng. Chúng không chỉ giúp giải quyết các bài toán tính toán giá trị lượng giác mà còn là nền tảng để rút gọn biểu thức, chứng minh đẳng thức và giải phương trình lượng giác ở các lớp sau. Tài liệu này sẽ hệ thống hóa toàn bộ kiến thức một cách chi tiết và dễ hiểu.

1. Hai cung đối nhau (α và $-\alpha$)

Hai cung được gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0. Trên đường tròn lượng giác, điểm biểu diễn của hai cung này đối xứng nhau qua trục hoành (trục Ox).

Công thức

- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
- $\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

Mẹo ghi nhớ: "Cos đối". Chỉ có giá trị cos của hai cung đối nhau là bằng nhau, các giá trị lượng giác còn lại (sin, tan, cot) đều đối nhau (trái dấu).

Ví dụ minh họa

1. **Ví dụ 1:** Tính giá trị của $\sin(-30^\circ)$ và $\cos(-\pi/4)$.

Lời giải:

- Áp dụng công thức, ta có: $\sin(-30^\circ) = -\sin(30^\circ) = -1/2$.
- Tương tự: $\cos(-\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

2. **Ví dụ 2:** Rút gọn biểu thức $A = \cos(-x) + \sin(-x) - \sin(x) + \cos(x)$.

Lời giải:

$$A = \cos(x) + (-\sin(x)) - \sin(x) + \cos(x)$$

$$A = \cos(x) - \sin(x) - \sin(x) + \cos(x)$$

$$A = 2\cos(x) - 2\sin(x)$$

2. Hai cung bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

Hai cung được gọi là bù nhau nếu tổng của chúng bằng π (hoặc 180°). Trên đường tròn lượng giác, điểm biểu diễn của hai cung này đối xứng nhau qua trục tung (trục Oy).

Công thức

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$

Mẹo ghi nhớ: "Sin bù". Chỉ có giá trị sin của hai cung bù nhau là bằng nhau, các giá trị lượng giác còn lại đều đối nhau.

Ví dụ minh họa

1. **Ví dụ 1:** Tính giá trị của $\sin(150^\circ)$ và $\cos(2\pi/3)$.

Lời giải:

- Ta có $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$. Vậy: $\sin(150^\circ) = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin(30^\circ) = 1/2$.
- Ta có $2\pi/3 = \pi - \pi/3$. Vậy: $\cos(2\pi/3) = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2$.

2. **Ví dụ 2:** Rút gọn biểu thức $B = \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x) + \cos(x)$.

Lời giải:

$$B = \sin(x) + (-\cos(x)) + \cos(x)$$

$$B = \sin(x) - \cos(x) + \cos(x)$$

$$B = \sin(x)$$

3. Hai cung phụ nhau (α và $\pi/2 - \alpha$)

Hai cung được gọi là phụ nhau nếu tổng của chúng bằng $\pi/2$ (hoặc 90°).

Công thức

- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot(\alpha)$
- $\cot(\pi/2 - \alpha) = \tan(\alpha)$

Mẹo ghi nhớ: "Phụ chéo". Các giá trị lượng giác của hai cung phụ nhau sẽ "chéo" cho nhau: sin của cung này bằng cos của cung kia, tan của cung này bằng cot của cung kia và ngược lại.

Ví dụ minh họa

1. **Ví dụ 1:** Tính giá trị của $\cos(60^\circ)$ và $\tan(\pi/3)$.

Lời giải:

- Ta có $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$. Vậy: $\cos(60^\circ) = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin(30^\circ) = 1/2$.
- Ta có $\pi/3 = \pi/2 - \pi/6$. Vậy: $\tan(\pi/3) = \tan(\pi/2 - \pi/6) = \cot(\pi/6) = \sqrt{3}$.

2. **Ví dụ 2:** Rút gọn biểu thức $C = \sin^2(10^\circ) + \sin^2(80^\circ)$.

Lời giải:

Ta thấy 10° và 80° là hai góc phụ nhau ($10^\circ + 80^\circ = 90^\circ$).

Do đó, $\sin(80^\circ) = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos(10^\circ)$.

Vậy $C = \sin^2(10^\circ) + \cos^2(10^\circ)$.

Áp dụng hằng đẳng thức lượng giác cơ bản $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ta có $C = 1$.

4. Hai cung hơn kém π (α và $\alpha + \pi$)

Hai cung hơn kém nhau một lượng π (hoặc 180°). Trên đường tròn lượng giác, điểm biểu diễn của hai cung này đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.

Công thức

- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$

- $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

- $\cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha)$

Mẹo ghi nhớ: "Hơn kém π , tan cot giữ nguyên". Chỉ có tan và cot là giữ nguyên giá trị (do tan và cot có chu kỳ tuần hoàn là π), còn sin và cos thì đổi dấu.

Ví dụ minh họa

1. **Ví dụ 1:** Tính giá trị của $\tan(225^\circ)$ và $\sin(7\pi/6)$.

Lời giải:

- Ta có $225^\circ = 45^\circ + 180^\circ$. Vậy: $\tan(225^\circ) = \tan(45^\circ + 180^\circ) = \tan(45^\circ) = 1$.

- Ta có $7\pi/6 = \pi/6 + \pi$. Vậy: $\sin(7\pi/6) = \sin(\pi/6 + \pi) = -\sin(\pi/6) = -1/2$.

2. **Ví dụ 2:** Rút gọn biểu thức $D = \tan(x + \pi) - \tan(x) + \cos(x + \pi)$.

Lời giải:

$$D = \tan(x) - \tan(x) + (-\cos(x))$$

$$D = -\cos(x)$$

5. Hai cung hơn kém $\pi/2$ (α và $\alpha + \pi/2$)

Đây là mối quan hệ mở rộng, giúp biến đổi các giá trị lượng giác một cách linh hoạt.

Công thức

- $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$

- $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha)$
- $\tan(\alpha + \pi/2) = -\cot(\alpha)$
- $\cot(\alpha + \pi/2) = -\tan(\alpha)$

Mẹo ghi nhớ: "Hơn kém $\pi/2$, chéo dấu". Tương tự như "phụ chéo" (sin thành cos, tan thành cot), nhưng cần chú ý về dấu. Sin đổi thành cos giữ nguyên dấu, cos đổi thành sin thì thêm dấu trừ.

Ví dụ minh họa

1. **Ví dụ 1:** Tính giá trị của $\sin(120^\circ)$.

Lời giải:

Ta có $120^\circ = 30^\circ + 90^\circ$. Vậy: $\sin(120^\circ) = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2$.

2. **Ví dụ 2:** Rút gọn biểu thức $E = \cos(x + \pi/2) + \sin(x)$.

Lời giải:

$$E = -\sin(x) + \sin(x)$$

$$E = 0$$

Bảng tổng hợp công thức

Cung liên quan	sin	cos	tan	cot
Đối nhau ($-\alpha$)	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\tan(\alpha)$	$-\cot(\alpha)$
Bù nhau ($\pi - \alpha$)	$\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$-\tan(\alpha)$	$-\cot(\alpha)$
Phụ nhau ($\pi/2 - \alpha$)	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\cot(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
Hơn kém π ($\alpha + \pi$)	$-\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
Hơn kém $\pi/2$ ($\alpha + \pi/2$)	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$-\cot(\alpha)$	$-\tan(\alpha)$

Mẹo ghi nhớ tổng hợp

Để dễ dàng nhớ các công thức trên, học sinh có thể học thuộc câu thơ sau:

"Cos-đối, Sin-bù, Phụ-chéo, khác Pi tan-cot"

Giải thích:

- **Cos-đối:** Trong hai cung đối nhau, giá trị cos bằng nhau, còn lại trái dấu.
- **Sin-bù:** Trong hai cung bù nhau, giá trị sin bằng nhau, còn lại trái dấu.
- **Phụ-chéo:** Trong hai cung phụ nhau, các giá trị "chéo" nhau ($\sin \leftrightarrow \cos$, $\tan \leftrightarrow \cot$).
- **Khác Pi tan-cot:** Trong hai cung hơn kém π , chỉ có tan và cot bằng nhau, còn sin và cos trái dấu.

Việc hiểu rõ bản chất của các mối quan hệ này trên đường tròn lượng giác sẽ giúp bạn không cần phải nhớ máy móc mà có thể tự suy ra công thức khi cần.