

Chuyên đề: Định lý Ta-lét và ứng dụng

I. Kiến thức trọng tâm cần nhớ

1. Tỷ số của hai đoạn thẳng

Định nghĩa: Tỷ số của hai đoạn thẳng là tỷ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

Công thức: Tỷ số của hai đoạn thẳng AB và CD được ký hiệu là AB/CD . **$AB/CD = (\text{độ dài AB}) / (\text{độ dài CD})$**

Chú ý: Độ dài của hai đoạn thẳng phải được đo bằng cùng một đơn vị (ví dụ: cùng là cm, hoặc cùng là m).

- **Ví dụ 1:** Nếu $AB = 6 \text{ cm}$ và $CD = 8 \text{ cm}$ thì tỷ số của hai đoạn thẳng AB và CD là $AB/CD = 6/8 = 3/4$.
- **Ví dụ 2:** Nếu $MN = 2 \text{ m}$ và $PQ = 150 \text{ cm}$. Để tính tỷ số, ta phải đổi về cùng đơn vị. Đổi $2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$. Khi đó, $MN/PQ = 200/150 = 4/3$.

2. Đoạn thẳng tỉ lệ

Định nghĩa: Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D' nếu có tỉ lệ thức.

Công thức: $AB/CD = A'B'/C'D'$ hoặc có thể viết là **$AB/A'B' = CD/C'D'$** .

- **Ví dụ:** Cho các đoạn thẳng $AB = 2 \text{ cm}$, $CD = 3 \text{ cm}$, $A'B' = 4 \text{ cm}$, $C'D' = 6 \text{ cm}$. Ta có $AB/CD = 2/3$ và $A'B'/C'D' = 4/6 = 2/3$. Vì $AB/CD = A'B'/C'D'$, nên hai

đoạn thẳng AB, CD tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B', C'D'.

3. Định lý Ta-lét trong tam giác (Định lý thuận)

Phát biểu: Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Xét tam giác ABC, có đường thẳng a song song với BC ($a \parallel BC$), cắt AB tại B' và AC tại C'.

Giả thiết - Kết luận:

Cho $\triangle ABC$, $B' \in AB$, $C' \in AC$. Nếu $B'C' \parallel BC$ thì ta có các tỉ lệ thức sau:

Công thức: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$

$\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$

$\frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC}$

- **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC có $DE \parallel BC$ ($D \in AB$, $E \in AC$). Biết $AD = 8$ cm, $DB = 4$ cm, $AE = 10$ cm. Tính độ dài EC.

Giải: Vì $DE \parallel BC$, theo định lý Ta-lét ta có: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Thay số vào: $\frac{8}{4} = \frac{10}{EC} \Rightarrow 2 = \frac{10}{EC} \Rightarrow EC = \frac{10}{2} = 5$ cm.

- **Ví dụ 2:** Trong hình vẽ, biết $MN \parallel PQ$, $OP = 9$, $ON = 6$, $OQ = 12$. Tính OM.

Giải: Xét $\triangle OPQ$ có $MN \parallel PQ$, theo định lý Ta-lét, ta có: $\frac{OM}{OP} = \frac{ON}{OQ}$. Thay số: $\frac{OM}{9} = \frac{6}{12} \Rightarrow \frac{OM}{9} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = \frac{9}{2} = 4.5$.

4. Định lý Ta-lét đảo

Phát biểu: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

Xét tam giác ABC , đường thẳng a cắt AB tại B' và AC tại C' .

Giả thiết - Kết luận:

Cho $\triangle ABC$, $B' \in AB$, $C' \in AC$. Nếu $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ hoặc $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$ hoặc $\frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC}$ thì $B'C' \parallel BC$.

Ứng dụng: Định lý đảo dùng để chứng minh hai đường thẳng song song.

- **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC có $AB = 15$ cm, $AC = 12$ cm. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = 5$ cm, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = 4$ cm. Chứng minh $DE \parallel BC$.

Giải: Ta xét tỉ số $\frac{AD}{AB} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. Ta xét tỉ số $\frac{AE}{AC} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Vì $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} (= \frac{1}{3})$, nên theo định lý Ta-lét đảo, ta có $DE \parallel BC$.

- **Ví dụ 2:** Cho tam giác MNK . Lấy điểm P trên MN sao cho $MP = 4$, $PN = 2$. Lấy điểm Q trên MK sao cho $MQ = 6$, $QK = 3$. Hỏi PQ có song song với NK không? Vì sao?

Giải: Ta có tỉ số $\frac{MP}{PN} = \frac{4}{2} = 2$. Tỉ số $\frac{MQ}{QK} = \frac{6}{3} = 2$. Vì $\frac{MP}{PN} = \frac{MQ}{QK} (= 2)$, nên theo định lý Ta-lét đảo, $PQ \parallel NK$.

5. Hệ quả của định lý Ta-lét

Phát biểu: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Xét tam giác ABC , có $B'C' \parallel BC$ ($B' \in AB, C' \in AC$).

Giả thiết - Kết luận:

Cho $\triangle ABC$, $B'C' \parallel BC$. Khi đó $\triangle AB'C'$ có các cạnh tỉ lệ với các cạnh của $\triangle ABC$.

Công thức: $AB'/AB = AC'/AC = B'C'/BC$

Chú ý: Hệ quả này vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng song song với một cạnh và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

- **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC , $DE \parallel BC$. Biết $AD = 6$, $AB = 9$, $BC = 12$. Tính độ dài DE .

Giải: Vì $DE \parallel BC$, theo hệ quả của định lý Ta-lét, ta có: $AD/AB = DE/BC$. Thay số: $6/9 = DE/12 \Rightarrow 2/3 = DE/12 \Rightarrow DE = (12 * 2) / 3 = 8$.

- **Ví dụ 2 (Bài toán thực tế):** Để đo chiều cao của một cái cây, người ta đặt một cọc thẳng đứng cao 1.5m song song với cây. Bóng của cọc trên mặt đất dài 2m, và bóng của cây dài 8m. Tính chiều cao của cây.

Giải: Gọi chiều cao cây là AB , cọc là DE . Bóng cây là BC , bóng cọc là EC . Vì tia nắng mặt trời là các tia song song nên $AD \parallel BE$. Ta có tam giác BCE và tam giác ACD . Tuy nhiên, để dễ hình dung, ta xét hai tam giác vuông tạo bởi cây/cọc và bóng của chúng. Gọi $\triangle ABC$ và $\triangle DEC$ là hai tam giác vuông tại B và E . Vì cây và cọc đều thẳng đứng nên $AB \parallel DE$. Theo hệ quả định lý Ta-lét (xét

với tam giác lớn có đỉnh là nguồn sáng), ta có tỉ lệ: $DE/AB = EC/BC$. Thay số: $1.5/AB = 2/8 \Rightarrow 1.5/AB = 1/4 \Rightarrow AB = 1.5 * 4 = 6m$. Vậy cây cao 6m.

II. Các dạng bài tập ứng dụng

Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng

Phương pháp: Dựa vào các tỉ lệ thức trong định lý Ta-lét thuận hoặc hệ quả của định lý Ta-lét để thiết lập phương trình và tìm độ dài chưa biết.

- **Bài tập:** Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Biết $OA = 4$ cm, $OC = 10$ cm, $CD = 15$ cm. Tính độ dài AB.

Giải: Xét $\triangle ODC$. Vì $AB \parallel CD$ nên theo hệ quả của định lý Ta-lét, ta có: $OA/OC = OB/OD = AB/CD$. Ta chỉ cần dùng tỉ lệ thức: $OA/OC = AB/CD$. Thay số: $4/10 = AB/15 \Rightarrow AB = (4 * 15) / 10 = 60 / 10 = 6$ cm. Vậy $AB = 6$ cm.

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp: Sử dụng định lý Ta-lét đảo. Ta cần chứng minh một trong các tỉ lệ thức của định lý, từ đó suy ra hai đường thẳng tương ứng song song.

- **Bài tập:** Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB, AC sao cho $AM = 4$ cm, $MB = 2$ cm, $AN = 6$ cm, $NC = 3$ cm. Chứng minh $MN \parallel BC$.

Giải: Ta tính các tỉ số: $AM/MB = 4/2 = 2$. $AN/NC = 6/3 = 2$. Vì $AM/MB = AN/NC (= 2)$, theo định lý Ta-lét đảo, ta kết luận $MN \parallel BC$.

Dạng 3: Chứng minh các hệ thức hình học

Phương pháp: Vận dụng linh hoạt định lý Ta-lét và hệ quả để lập các tỉ lệ thức cần thiết. Từ các tỉ lệ thức này, sử dụng các phép biến đổi đại số (như nhân chéo) để suy ra hệ thức cần chứng minh.

- **Bài tập:** Cho tam giác ABC, đường phân giác AD ($D \in BC$). Đường thẳng qua D và song song với AB cắt AC tại E. Chứng minh rằng $AC/AB = EC/EA$.

Giải: Xét $\triangle ABC$ có $DE \parallel AB$. Theo định lý Ta-lét, ta có: $AC/AE = BC/BD$ (1).
(Cách tiếp cận khác) Theo hệ quả định lý Ta-lét, ta có: $CE/CA = CD/CB = DE/AB$. Do AD là phân giác góc A, theo tính chất đường phân giác ta có: $AB/AC = DB/DC$. (Phần này thuộc kiến thức khác, nhưng thường kết hợp).

Giải lại theo đúng Ta-lét: Vì $DE \parallel AB$, theo định lý Ta-lét trong $\triangle CAB$, ta có: $CE/EA = CD/DB$ (2). Vì AD là phân giác góc A, ta có tính chất: $AB/AC = DB/DC \Rightarrow AC/AB = DC/DB$ (3). Từ (2) và (3), suy ra: $AC/AB = CE/EA$ (vì cùng bằng DC/DB). Đây là điều phải chứng minh.

III. Bảng tổng kết so sánh

Tiêu chí	Định lý Ta-lét thuận	Định lý Ta-lét đảo	Hệ quả của định lý Ta-lét
Giả thiết	Có một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại. (Cho //)	Có một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và định ra các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ. (Cho tỉ lệ)	Có một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại. (Cho //)
Kết luận	Các đoạn thẳng trên hai cạnh bị cắt tương ứng tỉ lệ. (Suy ra tỉ lệ)	Đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác. (Suy ra //)	Tạo ra tam giác mới có 3 cạnh tỉ lệ với 3 cạnh của tam giác ban đầu. (Suy ra tỉ lệ 3 cạnh)
Ứng dụng chính	Tính độ dài các đoạn thẳng trên hai cạnh bên.	Chứng minh hai đường thẳng song song.	Tính độ dài cạnh đáy của tam giác mới (đoạn thẳng song song) hoặc các cạnh của tam giác.