

Tổng hợp kiến thức Hàm số và Ứng dụng của Đạo hàm

Đây là tài liệu tổng hợp toàn bộ kiến thức lý thuyết và các dạng bài tập quan trọng trong chương 1: Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số, thuộc chương trình Đại số và Giải tích lớp 12.

1. Tính đơn điệu của hàm số

a. Định lý

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K :

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số **đồng biến** (tăng) trên K .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số **nghịch biến** (giảm) trên K .
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số **không đổi** trên K .

Lưu ý: Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số vẫn đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K .

b. Quy tắc xét tính đơn điệu

1. Tìm tập xác định D của hàm số.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$.
3. Tìm các điểm x_i mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

4. Lập bảng biến thiên: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và xét dấu của $f'(x)$ trên các khoảng đó.
5. Dựa vào dấu của $f'(x)$ để kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Xét tính đơn điệu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

- **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$.
- **Đạo hàm:** $y' = 3x^2 - 6x$.
- **Xét dấu y' :** $y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.
- **Bảng biến thiên:**
 $y' > 0$ khi $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$
 $y' \leq 0$ khi $x \in (0; 2)$
- **Kết luận:** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Ví dụ 2: Xét tính đơn điệu của hàm số $y = (2x + 1) / (x - 1)$.

- **Tập xác định:** $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- **Đạo hàm:** $y' = (2(x - 1) - 1(2x + 1)) / (x - 1)^2 = -3 / (x - 1)^2$.
- **Xét dấu y' :** Vì $(x - 1)^2 > 0$ với mọi $x \neq 1$, nên $y' = -3 / (x - 1)^2 < 0$ với mọi x thuộc D .
- **Kết luận:** Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định là $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

2. Cực trị của hàm số

a. Định nghĩa và điều kiện cần

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ và có điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại một lân cận $(x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \setminus \{x_0\}$, thì $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .
- Nếu tồn tại một lân cận $(x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \setminus \{x_0\}$, thì $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .

Điều kiện cần: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại đó thì **$f'(x_0) = 0$** .

b. Điều kiện đủ để có cực trị

Có hai quy tắc để tìm cực trị:

Quy tắc 1 (Dùng đạo hàm cấp 1)	Quy tắc 2 (Dùng đạo hàm cấp 2)
1. Tìm tập xác định, tính y'. 2. Tìm các nghiệm của phương trình $y' = 0$ và các điểm y' không xác định. 3. Lập bảng biến thiên. 4. Dựa vào sự đổi dấu của y' để kết luận: - Nếu y' đổi dấu từ (+) sang (-) khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực đại. - Nếu y' đổi dấu từ (-) sang (+) khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu.	1. Tìm tập xác định, tính y'. 2. Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i (điểm tới hạn). 3. Tính đạo hàm cấp hai y''. 4. Thay x_i vào y'': - Nếu $y''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_i. - Nếu $y''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_i. - Nếu $y''(x_i) = 0$ thì không kết luận được, phải quay lại dùng Quy tắc 1.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1 (Dùng Quy tắc 1): Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

- **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$.
- **Đạo hàm:** $y' = -4x^3 + 4x$.
- **Xét dấu y' :** $y' = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = -1$.
- **Bảng biến thiên:** y' đổi dấu từ (+) sang (-) tại $x = -1$ và $x = 1$; đổi dấu từ (-) sang (+) tại $x = 0$.

- **Kết luận:** Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ ($y_{CD} = 4$) và $x = 1$ ($y_{CD} = 4$).
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ ($y_{CT} = 3$).

Ví dụ 2 (Dùng Quy tắc 2): Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

- **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$.
- **Đạo hàm:** $y' = 3x^2 - 12x + 9$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.
- **Đạo hàm cấp hai:** $y'' = 6x - 12$.
- **Xét dấu y'' :**
 - Tại $x = 1$: $y''(1) = 6(1) - 12 = -6 < 0$. Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, $y_{CD} = 3$.
 - Tại $x = 3$: $y''(3) = 6(3) - 12 = 6 > 0$. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -1$.

3. Giá trị lớn nhất (GTLN) và Giá trị nhỏ nhất (GTNN)

a. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M được gọi là GTLN của $f(x)$ trên D nếu: **$f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$** và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$. Ký hiệu: $M = \max_D f(x)$.
- Số m được gọi là GTNN của $f(x)$ trên D nếu: **$f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$** và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$. Ký hiệu: $m = \min_D f(x)$.

b. Phương pháp tìm GTLN, GTNN trên đoạn $[a, b]$

1. Hàm số phải liên tục trên $[a, b]$.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$.
3. Tìm các điểm x_i thuộc khoảng (a, b) mà tại đó $f'(x_i) = 0$ hoặc $f'(x_i)$ không xác định.
4. Tính các giá trị $f(a)$, $f(b)$ và $f(x_i)$.
5. So sánh các giá trị vừa tính. Số lớn nhất là GTLN, số nhỏ nhất là GTNN trên $[a, b]$.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[0, 2]$.

- Hàm số liên tục trên $[0, 2]$.
- **Đạo hàm:** $y' = 3x^2 - 3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thuộc $(0, 2)$) hoặc $x = -1$ (loại).
- **Tính giá trị:**
 - $f(0) = 1$
 - $f(2) = 2^3 - 3(2) + 1 = 3$
 - $f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = -1$
- **Kết luận:** GTLN của hàm số trên $[0, 2]$ là 3 (tại $x = 2$). GTNN của hàm số trên $[0, 2]$ là -1 (tại $x = 1$).

4. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

a. Đường tiệm cận ngang (TCN)

Đường thẳng $y = y_0$ là TCN của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$$\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{(x \rightarrow -\infty)} f(x) = y_0.$$

b. Đường tiệm cận đứng (TCD)

Đường thẳng $x = x_0$ là TCD của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$$\lim_{(x \rightarrow x_0^+)} f(x) = +\infty, \lim_{(x \rightarrow x_0^-)} f(x) = -\infty, \lim_{(x \rightarrow x_0^+)} f(x) = -\infty, \text{ hoặc } \lim_{(x \rightarrow x_0^-)} f(x) = +\infty.$$

Mẹo: Đối với hàm phân thức, nghiệm của mẫu số mà không phải là nghiệm của tử số thường là tiệm cận đứng.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = (2x - 1) / (x + 1)$.

- **Tập xác định:** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- **Tiệm cận ngang:**

$$\text{Ta có } \lim_{(x \rightarrow +\infty)} y = \lim_{(x \rightarrow +\infty)} (2 - 1/x) / (1 + 1/x) = 2.$$

$$\text{Ta có } \lim_{(x \rightarrow -\infty)} y = \lim_{(x \rightarrow -\infty)} (2 - 1/x) / (1 + 1/x) = 2.$$

Vậy đường thẳng **$y = 2$** là TCN.

- **Tiệm cận đứng:**

$$\text{Ta có } \lim_{(x \rightarrow -1^+)} y = \lim_{(x \rightarrow -1^+)} (2x - 1) / (x + 1) = -\infty \text{ (vì tử } \rightarrow -3, \text{ mẫu } \rightarrow$$

$0^+)$.

Ta có $\lim_{(x \rightarrow -1^-)} y = \lim_{(x \rightarrow -1^-)} (2x - 1) / (x + 1) = +\infty$ (vì tử $\rightarrow -3$, mẫu $\rightarrow 0^-$).

Vậy đường thẳng $x = -1$ là TCD.

5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

a. Sơ đồ chung

1. **Tập xác định:** Tìm tập xác định D của hàm số.

2. **Sự biến thiên:**

- Xét chiều biến thiên: Tính y' , xét dấu y' , suy ra các khoảng đồng biến, nghịch biến.
- Tìm cực trị (nếu có).
- Tìm giới hạn tại vô cực và tại các điểm biên của tập xác định, từ đó suy ra các đường tiệm cận (nếu có).

3. **Lập bảng biến thiên:** Tổng hợp tất cả kết quả trên vào một bảng.

4. **Vẽ đồ thị:**

- Xác định các điểm đặc biệt: giao điểm với trục Ox ($y=0$), Oy ($x=0$), các điểm cực trị.
- Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).
- Dựa vào bảng biến thiên và các điểm đặc biệt để vẽ đồ thị.

b. Ví dụ minh họa

Ví dụ: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$.

2. **Sự biến thiên:**

- $y' = 3x^2 - 6x$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.
- Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 2)$.
- Cực đại: $(0; 2)$. Cực tiểu: $(2; -2)$.
- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$. Đồ thị không có tiệm cận.

3. **Bảng biến thiên:** (Học sinh tự vẽ bảng tổng hợp các thông tin trên).

4. **Vẽ đồ thị:**

- Giao Oy: $x = 0 \Rightarrow y = 2$. Điểm $(0; 2)$.
- Giao Ox: $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-2)=0 \Leftrightarrow x = 1, x = 1 \pm \sqrt{3}$.
Các điểm $(1; 0)$, $(1+\sqrt{3}; 0)$, $(1-\sqrt{3}; 0)$.
- Đồ thị đi qua điểm cực đại $(0; 2)$ và cực tiểu $(2; -2)$.
- (Vẽ đồ thị dựa trên các điểm và dấu hiệu trong bảng biến thiên).

6. Các bài toán liên quan

a. Tương giao đồ thị - Biện luận số nghiệm của phương trình

Số nghiệm của phương trình $\mathbf{f(x) = g(m)}$ là số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(m)$ (đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox).

Phương pháp:

1. Vẽ đồ thị hoặc lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.
2. Dựa vào đồ thị/bảng biến thiên, biện luận số giao điểm của $y = f(x)$ và đường thẳng $y = g(m)$ khi m thay đổi.

b. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, y_0)$ có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Trong đó: $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1 (Tương giao): Dựa vào đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ ở trên, tìm m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

- Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$ và đường thẳng $d: y = m$.
- Dựa vào bảng biến thiên/đồ thị, ta thấy (C) có điểm cực đại $y_{CD} = 2$ và điểm cực tiểu $y_{CT} = -2$.
- Để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt thì $y_{CT} < m < y_{CD}$.
- **Kết luận:** $-2 < m < 2$.

Ví dụ 2 (Tiếp tuyến): Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

- Tại $x_0 = 1$, ta có $y_0 = 1^3 - 3(1)^2 + 2 = 0$. Điểm tiếp xúc là $M(1; 0)$.
- Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x$.

- Hệ số góc tại $x_0 = 1$ là $f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3$.
- Phương trình tiếp tuyến là: $y = -3(x - 1) + 0 \Leftrightarrow \mathbf{y = -3x + 3}$.

VIDOCU.COM