

Tổng hợp kiến thức Xác suất của biến cố và các quy tắc tính xác suất

Phần 1: Các khái niệm cơ bản

1. Phép thử ngẫu nhiên và Không gian mẫu

- **Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử):** Là một thí nghiệm hay một hành động mà kết quả của nó không thể đoán trước được, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra.
- **Không gian mẫu (Ω):** Là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Số phần tử của không gian mẫu được kí hiệu là $n(\Omega)$.

Ví dụ 1: Gieo một con súc sắc 6 mặt cân đối. Phép thử là gieo súc sắc. Không gian mẫu là tập hợp các mặt có thể xuất hiện: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vậy $n(\Omega) = 6$.

Ví dụ 2: Gieo một đồng xu hai lần. Không gian mẫu là $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$, trong đó S là mặt sấp, N là mặt ngửa. Vậy $n(\Omega) = 4$.

2. Biến cố

- **Biến cố:** Là một tập con của không gian mẫu. Ta thường kí hiệu biến cố bằng các chữ cái in hoa A, B, C,...
- **Biến cố chắc chắn:** Là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử. Biến cố chắc chắn chính là không gian mẫu Ω .

- **Biến cố không thể:** Là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử. Biến cố không thể là tập hợp rỗng $\emptyset$.

Ví dụ: Xét phép thử gieo một con súc sắc 6 mặt.

- Gọi A là biến cố "Mặt xuất hiện là số chẵn". Ta có $A = \{2, 4, 6\}$.
- Gọi B là biến cố "Mặt xuất hiện có số chấm nhỏ hơn 7". Đây là biến cố chắc chắn, $B = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Gọi C là biến cố "Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 6". Đây là biến cố không thể, $C = \emptyset$.

3. Các phép toán trên biến cố

- **Biến cố đối ($\bar{A}$):** Biến cố đối của A, kí hiệu là $\bar{A}$, là biến cố "A không xảy ra".
 $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
- **Hợp của hai biến cố ($A \cup B$):** Là biến cố "A hoặc B xảy ra".
- **Giao của hai biến cố ($A \cap B$ hoặc AB):** Là biến cố "Cả A và B cùng xảy ra".
- **Biến cố xung khắc:** Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu chúng không thể cùng xảy ra, tức là $A \cap B = \emptyset$.

Ví dụ: Từ một hộp có 5 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh, lấy ngẫu nhiên 1 viên bi.

- Gọi A là biến cố "Lấy được bi đỏ".
- Gọi B là biến cố "Lấy được bi xanh".
- Biến cố đối của A là $\bar{A}$: "Không lấy được bi đỏ", tức là "Lấy được bi xanh". Vậy $\bar{A} = B$.

- A và B là hai biến cố xung khắc vì không thể cùng lúc lấy được vừa bi đỏ vừa bi xanh.

Phần 2: Định nghĩa cổ điển của xác suất

Giả sử một phép thử có không gian mẫu Ω gồm hữu hạn các kết quả có cùng khả năng xảy ra. Xác suất của biến cố A, kí hiệu $P(A)$, được tính bằng công thức:

$$P(A) = n(A) / n(\Omega)$$

Trong đó:

- **$n(A)$:** Số kết quả thuận lợi cho biến cố A (số phần tử của tập A).
- **$n(\Omega)$:** Tổng số kết quả có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu).

Tính chất của xác suất:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ với mọi biến cố A.
2. $P(\Omega) = 1$ (xác suất của biến cố chắc chắn bằng 1).
3. $P(\emptyset) = 0$ (xác suất của biến cố không thể bằng 0).

Ví dụ 1: Gieo một con súc sắc cân đối. Tính xác suất để mặt xuất hiện là số lẻ.

Giải:

- Không gian mẫu: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(\Omega) = 6$.
- Gọi A là biến cố "Mặt xuất hiện là số lẻ". $A = \{1, 3, 5\} \rightarrow n(A) = 3$.
- Xác suất của A là: $P(A) = n(A) / n(\Omega) = 3 / 6 = 0.5$.

Ví dụ 2: Một lớp có 30 học sinh, trong đó có 18 nữ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất chọn được học sinh nam.

Giải:

- Không gian mẫu là chọn 1 học sinh từ 30 học sinh: $n(\Omega) = 30$.
- Số học sinh nam là: $30 - 18 = 12$.
- Gọi B là biến cố "Chọn được học sinh nam". Số kết quả thuận lợi: $n(B) = 12$.
- Xác suất của B là: $P(B) = n(B) / n(\Omega) = 12 / 30 = 0.4$.

Phần 3: Các quy tắc tính xác suất

1. Quy tắc cộng xác suất

a. Với hai biến cố xung khắc

Nếu A và B là hai biến cố xung khắc ($A \cap B = \emptyset$), thì xác suất để A hoặc B xảy ra là:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ví dụ: Một chiếc hộp có 5 quả cầu trắng, 3 quả cầu đen và 2 quả cầu vàng. Lấy ngẫu nhiên một quả. Tính xác suất lấy được quả cầu màu trắng hoặc màu đen.

Giải:

- Tổng số quả cầu là $5 + 3 + 2 = 10$.
- Gọi A là biến cố "Lấy được quả cầu trắng". $P(A) = 5/10$.
- Gọi B là biến cố "Lấy được quả cầu đen". $P(B) = 3/10$.
- A và B là hai biến cố xung khắc.
- Xác suất lấy được quả trắng hoặc đen là: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 5/10 + 3/10 = 8/10 = 0.8$.

b. Với hai biến cố bất kỳ

Nếu A và B là hai biến cố bất kỳ, thì xác suất để A hoặc B xảy ra là:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ví dụ: Rút ngẫu nhiên một lá bài từ bộ bài 52 lá. Tính xác suất rút được lá Át hoặc lá cơ.

Giải:

- Gọi A là biến cố "Rút được lá Át". Có 4 lá Át. $P(A) = 4/52$.
- Gọi B là biến cố "Rút được lá cơ". Có 13 lá cơ. $P(B) = 13/52$.
- Biến cố " $A \cap B$ " là "Rút được lá Át cơ". Có 1 lá Át cơ. $P(A \cap B) = 1/52$.
- A và B không xung khắc. Áp dụng quy tắc cộng mở rộng:
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52 = 4/13$.

2. Quy tắc tính xác suất của biến cố đối

Xác suất của biến cố đối $\bar{A}$ được tính bằng công thức:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Quy tắc này rất hữu ích khi tính xác suất của các biến cố "có ít nhất một..."

Ví dụ: Gieo 3 đồng xu cân đối. Tính xác suất để có ít nhất một mặt ngửa.

Giải:

- Không gian mẫu có $n(\Omega) = 2^3 = 8$.
- Gọi A là biến cố "Có ít nhất một mặt ngửa".

- Biến cố đối $\bar{A}$ là "Không có mặt ngửa nào", tức là "Cả 3 đồng xu đều sấp".
- Chỉ có 1 trường hợp cho $\bar{A}$ là $\{SSS\}$. Vậy $n(\bar{A}) = 1$.
- $P(\bar{A}) = n(\bar{A}) / n(\Omega) = 1/8$.
- Vậy, xác suất của biến cố A là: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 1/8 = 7/8$.

3. Quy tắc nhân xác suất

a. Với hai biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia. Khi A và B độc lập, ta có:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Ví dụ: Gieo một đồng xu và một con súc sắc. Tính xác suất để đồng xu ra mặt sấp và súc sắc ra mặt 6 chấm.

Giải:

- Gọi A là biến cố "Đồng xu ra mặt sấp". $P(A) = 1/2$.
- Gọi B là biến cố "Súc sắc ra mặt 6 chấm". $P(B) = 1/6$.
- A và B là hai biến cố độc lập.
- Xác suất để cả hai cùng xảy ra là: $P(A \cap B) = P(A) * P(B) = (1/2) * (1/6) = 1/12$.

b. Với hai biến cố phụ thuộc (Quy tắc nhân tổng quát)

Khi hai biến cố phụ thuộc, xác suất xảy ra của biến cố này sẽ ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia. Ta sử dụng khái niệm xác suất có điều kiện.

Xác suất của biến cố B với điều kiện biến cố A đã xảy ra, kí hiệu là $P(B|A)$.

Công thức nhân tổng quát:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$$

Ví dụ: Một hộp chứa 6 bi trắng và 4 bi đen. Lấy lần lượt 2 bi không hoàn lại.

Tính xác suất cả hai bi lấy ra đều là bi trắng.

Giải:

- Gọi A là biến cố "Lấy được bi trắng ở lần 1". $P(A) = 6/10$.
- Gọi B là biến cố "Lấy được bi trắng ở lần 2".
- Nếu lần 1 đã lấy được bi trắng (biến cố A đã xảy ra), thì trong hộp còn lại 5 bi trắng và 4 bi đen (tổng cộng 9 bi).
- Xác suất lấy được bi trắng ở lần 2, biết rằng lần 1 đã lấy được bi trắng là:
 $P(B|A) = 5/9$.
- Xác suất để cả hai bi đều trắng là: $P(A \cap B) = P(A) * P(B|A) = (6/10) * (5/9) = 30/90 = 1/3$.

Phần 4: Bảng tóm tắt các quy tắc chính

Quy tắc	Điều kiện áp dụng	Công thức
Quy tắc cộng	Hai biến cố xung khắc ($A \cap B = \emptyset$)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Quy tắc cộng (Mở rộng)	Hai biến cố bất kỳ	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Quy tắc nhân	Hai biến cố độc lập	$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
Quy tắc nhân (Tổng quát)	Hai biến cố phụ thuộc	$P(A \cap B) = P(A) * P(B A)$
Biến cố đối	Mọi biến cố A	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$